

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПОТІЄНКО ОЛЕКСІЙ СЕРГІЙОВИЧ

УДК 518.5+531.2

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ОПИСУ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНИХ
ЕФЕКТІВ В ПРОТОН-ПРОТОННОМУ РОЗСІЯННІ І ДЛЯ ПОБУДОВИ
МОНТЕ-КАРЛО ГЕНЕРАТОРІВ**

Спеціальність 104 – «Фізика і астрономія»

Галузь знань 10 «Природничі науки»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



Потієнко О.С.

Науковий керівник: Шарф І.В., к.ф.-м.н., доцент.

Одеса – 2020

АНОТАЦІЯ

Потієнко О.С. Метод Лапласа для опису інтерференційних ефектів в протон-протонному розсіянні і для побудови Монте-Карло генераторів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 Фізика та астрономія – Одеський національний політехнічний університет, Одеса, 2020.

Дисертацію присвячено розробці методу врахування інтерференційних внесків в виразах для перерізів протон-протонного розсіяння і при Монте-Карло генерації непружних подій методом матричних елементів. Всі розрахунки проведено в межах модельної теорії ϕ^3 із дійсним скалярним полем, але можуть застосовуватися в КХД та інших калібрувальних теоріях.

Розроблено новий метод розрахунку інтерференційних внесків, заснований на застосуванні методу Лапласа не для кожного інтерференційного внеску окремо, а для сум внесків із близькими точками максимуму. За допомогою цього методу проведено розрахунки парціальних перерізів та інклюзивних перерізів по бистроті з урахуванням кінцевих станів, що містять до 50 частинок. Вперше дано теоретичне пояснення зміни характеру залежності інклюзивного перерізу від бистроти вторинних частинок саме як інтерференційного ефекту. Розроблено і реалізовано відповідні розрахункові алгоритми.

Розроблено новий метод Монте-Карло генерування подій на основі на методу Лапласа із застосуванням розробленого методу інтерференційних внесків. Цей метод значно розширює можливості застосування методу матричних елементів при генерації непружних подій, дозволяючи генерувати події із утворенням великої кількості вторинних частинок.

Розроблено алгоритмічний метод врахування інтерференційних ефектів при генерації непружних подій. Отримані результати, а також реалізовані ал-

горитми можуть бути використані як підпрограми в існуючих генераторах подій та інтеграторах перерізів.

Показано, що максимум модуля деревної діаграми з однією вхідною і довільною кількістю вихідних частинок досягається при однакових чотириімпульсах вихідних частинок. З урахуванням суми по перестановках вихідних частинок це призводить до факторіального підсилення константи зв'язку. Цей результат суттєво відрізняється від виявленого в моделі ДГЛАП підсилення ступенями великого логарифму і доказує суттєвість внеску в перерізи розсіяння іншої ніж в ДГЛАП області фазового простору. Таким чином, виявлено новий механізм когерентності тотожних частинок в зливах, який може бути не тільки врахований при побудові генераторів подій, а й може бути використаний для створення лазерів на принципово новій основі ніж існуючі. Окрім того, отримані результати дозволяють проводити генерацію злив (партонних або адронних в залежності від моделі) методом матричних елементів.

Показано, що в процесах з утворенням декількох злив суттєву роль грають внески, пов'язані із перестановками частинок між різними зливами, тобто доведено необхідність врахування інтерференції між зливами при теоретичних розрахунках і генеруванні подій. Показано, що запропоновані в дисертації методи можуть бути застосовані для чисельних розрахунків і генерації подій для випадку процесів з утворенням декількох багаточастинкових злив.

Ключові слова: протон-протонне розсіяння, інтерференційні внески, інтерференційні ефекти, парціальні перерізи, інклюзивні перерізи по швидкості вторинних частинок, Монте-Карло генератори, партонні зливи, адронні зливи.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Основні результати дисертаційної роботи викладено в 18 публікаціях, 6 з яких індексуються в наукометричній базі Scopus, у тому числі в 8 статтях у наукових фахових виданнях України та інших держав (1 статтю опубліковано у виданні, віднесеному до першого квартилю (Q 1) відповідно до класифіка-

ції SCImago Journal and Country Rank), 2 статтях у збірниках наукових праць міжнародних конференцій і додатково висвітлено в 8 тезах доповідей на міжнародних конференціях.

1. O. Potiienko, K. Merkotan, N. Chudak, D. Ptashynskiy, T. Zelentsova, T. Yushkevich, I. Sharph, and V. Rusov, New method of accounting for interference contributions within a multiperipheral model, *Physical Review D* 101, 7 (2020).

<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.101.076021>

2. Чудак Н.О., Меркотан К.К., Пташинський Д.А., Потієнко О.С., Делієргієв М.А., Тихонов А.В., Сохранний Г.О., Жарова О.В., Березовський О.Д., Войтенко В.В., Волкотруб Ю.В., Шарф І.В., Русов В.Д., Внутрішні стани адронів в релятивістських системах відліку, *Укр. фіз. жур.* 61(12), 1033 (2016).

<https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019004>

3. Чудак Н.О., Меркотан К.К., Пташинський Д.А., Потієнко О.С., Шарф І.В., Брегід В.І., Розрахунок диференціального перерізу пружного розсіяння адронів за переданим чотириімпульсом в межах теорії збурень, *Журн. фіз. досл.* 23(1), 1101 (2019).

http://physics.lnu.edu.ua/jps/index_ua.html

4. D.A. Ptashynskiy, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, K.K. Merkotan, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskiy, V.V. Opyatyuk, O.V. Zharova, T.V. Yushkevich, I.V. Sharph, V.D. Rusov, Multiparticle fields on the subset of simultaneity, *Ukrainian Journal of Physics* 64(8), 732 (2019).

<https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019394/1441>

5. Меркотан К.К., Зеленцова Т.М., Чудак Н.О., Пташинський Д.А., Урбаневич В.В., Потієнко О.С., Войтенко В.В., Березовський О.Д., Шарф І.В., Русов В.Д., Багаточастинкові поля і механізм Хіггса, *Журн. фіз. досл.* 22(3), 3001 (2018).

<http://physics.lnu.edu.ua/jps/index.html>

6. N. Chudak, M. Deliyergiyev, K. Merkotan, O. Potiienko, D. Ptashynskiy, Y. Shabatura, G. Sokhrannyi, A. Tykhonov, Y. Volkotrub, I. Sharph, V. Rusov, Multi-Particle Quantum Fields, Physics Journal 2(3), 181 (2016).

<http://www.aiscience.org/journal/paperInfo/pj?paperId=2183>

7. K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskyi, I.V. Sharph, V.D. Rusov, A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, East Eur. J. Phys. 5(2), 35 (2018).

<http://eejp.univer.kharkov.ua/Biblio/2018/52p35-48.pdf>

8. Ю.Волкотруб, І. Шарф, В. Русов, Н.Чудак (Подольян), О. Потієнко, Д. Пташинський, К.Меркотан, А.Тихонов, М.Делієргієв, В.Урбаневич, Метод Лапласа для Монте-Карло-генераторів процесів розсіювання, Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика 38, 96 (2015).

http://fizyka-visnyk.uzhnu.edu.ua/article/view/110753/pdf_13

9. I.V Sharf, K. K. Merkotan, N. A. Podolyan, D. A. Ptashynskyy, A. V. Tykhonov, M. A. Deliyergiyev, G. O. Sokhrannyi, Y. V. Volkotrub, O.S. Potiyenko, V. D. Rusov, On equivalence of gluon-loop exchange in the inelastic processes in perturbative QCD to pion exchange in ϕ^3 theory, EPJ Web of Conferences 60, 20018 (2013).

https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/pdf/2013/21/epjconf_lhpc2013_20018.pdf

10. K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskyi, I.V. Sharph, V.D. Rusov, An alternative method of an electromagnetic field introduction into a Standard Model, in Proceedings of International Conference of Young Scientists “Problems of Physics and Astronomy”, edited by A.M. Maharramov (Baku University Publishing House, Baku, 2017), 82.

<http://static.bsu.az/w10/Shekil/Conferences/MagistrLAR%20ve%20Tedqiqatcilar/Arxiv/2018/Conf%20tam.pdf>

11. N. Chudak, D. Ptashynskyi, A. Potienko, Multi-particle field operators as a method for hadron scattering description, in Abstracts of Posters of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “QCD - Old Challenges and New Opportunities” (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2017).
<https://www.we-heraeus-stiftung.de/veranstaltungen/schulen/2017/qcd-old-challenges-and-new-opportunities/>

12. O. S. Potienko, A new method for Monte-Carlo event generators of the scattering processes, in Abstracts of 18-th Odessa International Astronomical Gamov Conference-School “Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology, Cosmomicrophysics, Astroparticle Physics, Radioastronomy and Astrobiology” (Odessa, 2018), 14.

ftp://ftp.mao.kiev.ua/pub/journals/discrete/abstracts_gamow_2018.pdf

13. Ptashynskyi Dmytro, Chudak Nataliia, Merkotan Kyrylo, Potienko Oleksii, A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, in Proceedings of the Thirteenth Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics (CIPANP 2018), edited by Wick Haxton, eConf C180529, 91.

<https://conferences.lbl.gov/event/137/session/12/>

14. O. Potienko, I. Sharf, The new method of interference contributions accounting for inelastic scattering diagrams, in Abstracts of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “Diffractive and electromagnetic processes at high energies” (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2015).

<http://school-diff2015.physi.uni-heidelberg.de>

15. Dmytro Ptashynskyi, Nataliia Chudak, Oleksii Potienko, Kyrylo Merkotan, Multi-particle fields as a method for hadron’s description, in Book of Abstracts of 8th International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics (IWARA2018, Ollantaytambo, 2018), 35.

<https://indico.cern.ch/event/646046/book-of-abstracts.pdf>

16. Н.О. Чудак, К.К. Меркотан, Д.А. Пташинський, О. С. Потієнко, В.І. Брегід, Розрахунок диференціального перерізу пружного розсіяння адронів за переданим чотириімпульсом в межах теорії збурень, Тези доповідей

Міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (Еврика-2018), (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018), Е6.

http://old.physics.lnu.edu.ua/confer/heureka2018/ua_index.php

17. Д.А. Пташинський, Н.О. Чудак, К.К. Меркотан, О. С. Потієнко, В.І. Брегід, Багаточастинкові польові оператори в квантовій теорії поля, Тези доповідей Міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (Еврика-2018), (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018), Е4.

http://old.physics.lnu.edu.ua/confer/heureka2018/ua_index.php

18. І.В. Шарф, О.С. Потієнко, Н.О. Подолян, Ю.В. Волкотруб, Д.А. Пташинський, К.К. Меркотан, А.В. Тихонов, М.А. Делієргієв, В.Д. Русов, Ю.В. Харитонов, Новий метод врахування інтерференційних внесків для діаграм непружного розсіяння, Матеріали міжнародної конференції молодих учених і аспірантів, (Берега А.Е., Ужгород, 2015), 207.

<http://www.nas.gov.ua/UA/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000009639>

ABSTRACT

Potiienko O.S. Laplace's method for description of the interference effects in proton-proton scattering and for Monte Carlo event generators.

Dissertation for obtaining a degree of Doctor of Philosophy in specialty 104 Physics and Astronomy - Odessa National Polytechnic University, Odessa, 2020.

Thesis is devoted to the development of a method of accounting for the interference contributions for both the calculations of proton-proton scattering cross sections and the Monte Carlo event generations of inelastic processes using matrix elements method. Although all the calculations are performed within the real scalar ϕ^3 model, the method can be used for QCD and other gauge theories.

The new method of accounting for interference contributions is developed. The main idea behind the method is to apply the Laplace's method not for each of the interference contributions but rather for the sum of contributions with the close maximum points. The method was used to calculate the partial cross-sections and inclusive rapidity distributions with accounting for the final states containing up to 50 secondary particles. The theoretical explanation for the energy dependence of the shape of inclusive rapidity distribution is provided for the first time, considering this dependence exactly as the interference effect. All the corresponding computational algorithms are also implemented.

The new method for Monte Carlo event generations is developed. It is based on the ideas behind the method of accounting for the interference contributions, which significantly extends the potentials of application of the matrix elements method for the generation of inelastic scattering events. This method makes possible the generation of events with the large number of secondary particles.

The new algorithmic method of accounting for the interference effects for generation of inelastic scattering events is developed. The algorithms can be used as the subroutines in existing event generators and cross-section integrators.

It is shown that the modulus of the tree diagram amplitude with one incoming particle and an arbitrary number of outgoing particles reaches its maximum at equal four-momenta of the outgoing particles. Taking into account the sum over the permutations of outgoing particles, all this facts leads to the factorial amplification of the coupling. This result differs significantly from the amplification in DGLAP caused by the powers of large logarithm, which evidences about the significance of the phase space region different from that in DGLAP.

Thus the new mechanism of the coherence of secondary particles in the showers is established. This mechanism can be taken into account not only for development of event generations, but also can be used for development of lasers based on new principles. Moreover, the obtained results makes possible generations of the particle showers (parton or hadron, depending on a model) using the method of matrix elements. It is shown that in the processes with formation of multiple showers the significant role is played by the contributions arose from the permutations of secondary particles between showers. It evidences the necessity of accounting for the interference between showers when calculating the cross-sections or generating events.

It is shown that the methods proposed in the dissertation can be used for the numerical calculations and events generation for the processes with formation of several multi-particle showers.

Keywords: proton-proton scattering, interference contribution, interference effect, partial cross-section, inclusive rapidity distribution, Monte Carlo event generator, parton shower, hadron shower.

LIST OF PUBLICATIONS

The main results of the dissertation are exposed in 18 publications, including 6 publications indexed in scientometric database Scopus, 8 articles published in professional editions of Ukraine and another countries (1 article is published in the edition of the first quartile (Q 1), according to the classification SCImago Journal

and Country Rank), 2 articles published in the collections of scientific works of the international conferences, and additionally exposed in 8 abstracts of international conferences.

1. O. Potiienko, K. Merkotan, N. Chudak, D. Ptashynskiy, T. Zelentsova, T. Yushkevich, I. Sharph, and V. Rusov, New method of accounting for interference contributions within a multiperipheral model, *Physical Review D* 101, 7 (2020).

<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.101.076021>

2. N.O. Chudak, K.K. Merkotan, D.A. Ptashynskiy, O.S. Potiienko, M.A. Deliyergiyev, A.V. Tykhonov, G.O. Sokhrannyi, O.V. Zharova, O.D. Berezovs'kyi, V.V. Voitenko, Yu.V. Volkotrub, I.V. Sharph, V.D. Rusov, Internal states of hadrons in relativistic reference frames, *Ukr. J. Phys.* 61(12), 1033 (2016).
<https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019004>

3. N.O. Chudak, K.K. Merkotan, D.A. Ptashynskiy, O.S. Potiienko, I.V. Sharf, V.I. Bregid, The calculation of the differential cross section of hadron elastic scattering by transferred four-momentum within the perturbation theory, *J Phys Stud* 23(1), 1101(2019).

http://physics.lnu.edu.ua/jps/index_ua.html

4. D.A. Ptashynskiy, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, K.K. Merkotan, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskiy, V.V. Opyatyuk, O.V. Zharova, T.V. Yushkevich, I.V. Sharph, V.D. Rusov, Multiparticle fields on the subset of simultaneity, *Ukrainian Journal of Physics* 64(8), 732 (2019).
<https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019394/1441>

5. K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovs'kiy, I.V. Sharf, V.D. Rusov, Multiparticle fields and Higgs mechanism, *J Phys Stud* 22(3), 3001 (2018).
<http://physics.lnu.edu.ua/jps/index.html>

6. N. Chudak, M. Deliyergiyev, K. Merkotan, O. Potiienko, D. Ptashynskiy, Y. Shabatura, G. Sokhrannyi, A. Tykhonov, Y. Volkotrub, I. Sharph, V. Rusov, Multi-Particle Quantum Fields, *Physics Journal* 2(3), 181 (2016).

<http://www.aiscience.org/journal/paperInfo/pj?paperId=2183>

7. K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskyi, I.V. Sharph, V.D. Rusov, A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, East Eur. J. Phys. 5(2), 35 (2018).

<http://eejp.univer.kharkov.ua/Biblio/2018/52p35-48.pdf>

8. Yu. Volkotrub, I. Sharf, V. Rusov, N. Chudak (Podolyan), O. Potiienko, D. Ptashynskiy, K. Merkotan, A. Tykhonov, M. Deliyergiyev, V. Urbanevich, Laplace's method for Monte Carlo event generators for the scattering processes, Scientific Herald of Uzhhorod University. Series Physics 38, 96 (2015).

http://fizyka-visnyk.uzhnu.edu.ua/article/view/110753/pdf_13

9. I.V Sharf, K. K. Merkotan, N. A. Podolyan, D. A. Ptashynskyy, A. V. Tykhonov, M. A. Deliyergiyev, G. O. Sokhrannyi, Y. V. Volkotrub, O.S. Potiienko, V. D. Rusov, On equivalence of gluon-loop exchange in the inelastic processes in perturbative QCD to pion exchange in ϕ^3 theory, EPJ Web of Conferences 60, 20018 (2013).

https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/pdf/2013/21/epjconf_lhcp2013_20018.pdf

10. K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskyi, I.V. Sharph, V.D. Rusov, An alternative method of an electromagnetic field introduction into a Standard Model, in Proceedings of International Conference of Young Scientists "Problems of Physics and Astronomy", edited by A.M. Maharramov (Baku University Publishing House, Baku, 2017), 82.

<http://static.bsu.az/w10/Shekil/Conferences/MagistrLAR%20ve%20Tedqiqatcilar/Arxiv/2018/Conf%20tam.pdf>

11. N. Chudak, D. Ptashynskiy, A. Potienko, Multi-particle field operators as a method for hadron scattering description, in Abstracts of Posters of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School "QCD - Old Challenges and New Opportunities" (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2017).

<https://www.we-heraeus-stiftung.de/veranstaltungen/schulen/2017/qcd-old-challenges-and-new-opportunities/>

12. O. S. Potiienko, A new method for Monte-Carlo event generators of the scattering processes, in Abstracts of 18-th Odessa International Astronomical Gamov Conference-School “Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology, Cosmomicrophysics, Astroparticle Physics, Radioastronomy and Astrobiology” (Odessa, 2018), 14.

ftp://ftp.mao.kiev.ua/pub/journals/discrete/abstracts_gamow_2018.pdf

13. Ptashynskiy Dmytro, Chudak Nataliia, Merkotan Kyrylo, Potiienko Oleksii, A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, in Proceedings of the Thirteenth Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics (CIPANP 2018), edited by Wick Haxton, eConf C180529, 91.

<https://conferences.lbl.gov/event/137/session/12/>

14. O. Potiienko, I. Sharf, The new method of interference contributions accounting for inelastic scattering diagrams, in Abstracts of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “Diffractive and electromagnetic processes at high energies” (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2015).

<http://school-diff2015.physi.uni-heidelberg.de>

15. Dmytro Ptashynskiy, Nataliia Chudak, Oleksii Potiienko, Kyrylo Merkotan, Multi-particle fields as a method for hadron’s description, in Book of Abstracts of 8th International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics (IWARA2018, Ollantaytambo, 2018), 35.

<https://indico.cern.ch/event/646046/book-of-abstracts.pdf>

16. N.O. Chudak, K.K. Merkotan, D.A. Ptashynskiy, O.S. Potiienko, V.I. Bregid, Calculation of the differential cross-section of elastic hadrons scattering on the transferred fourmomenta within the perturbation theory, in Abstracts of International conference of students and young scientists in theoretical and experimental physics (Heureka-2018), (Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018), E6.

http://old.physics.lnu.edu.ua/confer/heureka2018/ua_index.php

17. D.A. Ptashynskiy, N.O. Chudak, K.K. Merkotan, O.S. Potiienko, V.I. Bregid, Multiparticle field operators in quantum field theory, in Abstracts of International conference of students and young scientists in theoretical and experimental physics (Heureka-2018), (Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018), E4.

http://old.physics.lnu.edu.ua/confer/heureka2018/ua_index.php

18. I.V. Sharf, O.S. Potiienko, N.O. Podolyan, Yu.V. Volkotrub, D.A. Ptashynskiy, K.K. Merkotan, A.V. Tykhonov, M.A. Deliyergiyev, V.D. Rusov, Yu.V. Kharytonova, New method of accounting for the interference contributions for the inelastic scattering diagrams, in Proceedings of International conference of young scientists and postgraduates, (Bereza A.E., Uzhgorod, 2015), 207.

<http://www.nas.gov.ua/UA/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000009639>

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП.....	16
РОЗДІЛ 1 ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	24
1.1. Суттєвість інтерференційних внесків і проблеми їх врахування.....	24
1.2. Огляд існуючих підходів до врахування інтерференційних внесків...	27
1.3. Огляд існуючих підходів до побудови Монте-Карло генераторів і врахування в них інтерференційних ефектів.....	30
1.4. Висновки по літературному огляду і постановка задачі дослідження.....	35
РОЗДІЛ 2 НОВИЙ МЕТОД ВРАХУВАННЯ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНИХ ВНЕСКІВ, ЗАСНОВАНИЙ НА МЕТОДІ ЛАПЛАСА.....	37
2.1. Розташування точок максимуму квадрату модуля амплітуди розсіяння з урахуванням інтерференційних внесків і розбиття множини вторинних частинок на групи.....	50
2.2. Врахування інтерференції всередині груп та між групами.....	59
2.3. Модель інклюзивного перерізу вторинних частинок по бистротах і порівняння із експериментом.....	69
2.4. Висновки до розділу 2.....	74
РОЗДІЛ 3 МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ПОБУДОВИ МОНТЕ-КАРЛО ГЕНЕРАТОРІВ І ВРАХУВАННЯ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНИХ ЕФЕКТІВ.....	76
3.1. Метод Лапласа для генерації подій у випадку амплітуди розсіяння з однією точкою максимуму.....	80
3.2. Метод Лапласа для генерації подій у випадку амплітуди розсіяння з декількома точками максимуму. Алгоритм врахування інтерференції.....	88
3.3. Генерування інклюзивного перерізу по бистроті і зіставлення з експериментом.....	91
3.4. Висновки до розділу 3.....	95
РОЗДІЛ 4 МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ МОНТЕ-КАРЛО ГЕНЕРАЦІЇ	

ПАРТОННИХ І АДРОННИХ ЗЛИВ МЕТОДОМ МАТРИЧНИХ

ЕЛЕМЕНТІВ.....	97
4.1. Точка максимуму амплітуди розсіяння деревесної діаграми загального виду в моделі фі-три і її зв'язок з генерацією злив.....	104
4.2. Аналіз внесків діаграм різної топології в парціальний переріз розсіяння з утворенням n вторинних частинок.....	125
4.3. Необхідність врахування інтерференції між зливами і метод генерування подій з урахуванням цієї інтерференції.....	127
4.4. Висновки до розділу 4.....	132
ВИСНОВКИ.....	133
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	136
ДОДАТОК.....	149

ВСТУП

При теоретичному описі процесів непружного розсіяння адронів методом діаграм Р.Фейнмана, амплітуда розсіяння представляється сумою діаграм із всіма можливими способами приєднання ліній вторинних частинок до діаграми. Тому при розрахунку експериментально спостережних величин, коли необхідно умножити цю суму на її комплексно спряжену величину, виникають всі можливі добутки доданків, які згідно із принципами квантової теорії описують інтерференцію кінцевих станів системи. Саме в цьому сенсі тут і далі в дисертації використовуватиметься термін інтерференційні внески.

Прискорювачі вже давно досягли таких енергій і відповідно множинностей вторинних частинок, що кількість інтерференційних внесків, які необхідно врахувати, є катастрофічно великою, оскільки із зростанням кількості тожних вторинних частинок, вона зростає як факторіал цієї кількості.

В той же час, в теоретичних дослідженнях врахуванню інтерференційних внесків приділяється дуже мало уваги. Причиною цього є домінування в феноменологічних підходах припущення, що при описі непружних процесів можна обмежитися мультиреджівською областю фазового простору [1-5]. Ця область характеризується сильним впорядкуванням вторинних частинок по компонентам імпульсів, повздовжніх до вісі зіткнення вихідних адронів в їх системі центру мас. Внаслідок сильного впорядкування інтерференційні внески прийнято вважати малими і не враховувати їх при моделюванні експериментально спостережуваних величин. В той же час, застосування методу Лапласа [6-11] дозволяє без попередніх припущень знаходити область фазового простору, де сконцентрована більша частина подій. Ця область виявляється суттєво відмінною від мультиреджівської саме відсутністю сильного впорядкування по бистротах. Окрім того, навіть якщо самі інтерференційні внески є малими, їх величезна кількість не дозволяє ними нехтувати.

Необхідність врахування інтерференційних внесків становить проблему не тільки для теоретичних розрахунків, а й для задач генерування подій.

На сьогоднішній день генерування подій із утворенням великої кількості частинок в кінцевому стані здійснюється методом партонних злив [12], який базується на наближенні Докшицера-Грібова-Ліпатова-Альтареллі-Парізі (ДГЛАП) [13-15]. Значно більш фізичним є метод генерування, заснований на застосуванні матричних елементів [12]. Але існуючі алгоритми генерування дозволяють застосовувати цей метод лише у випадках лише декількох частинок в кінцевому стані. За умови ефективного методу врахування інтерференційних внесків застосування методу Лапласа може розширити можливості методу матричних елементів з точки зору кількості вторинних частинок.

Актуальність теми. За результатами вимірювань на великому адронному колайдері, спостерігаються з суттєвими перерізами процеси з утворенням більш ніж ста пар тільки заряджених частинок. Врахування інтерференційних ефектів для таких множинностей є дуже складною задачею, яка не тільки не розв'язана, а навіть не досліджувалася. В тій невеликій кількості робіт, де інтерференційні ефекти розглядалися, використовувалося безпосереднє підсумування інтерференційних доданків, що обмежувало множинності, які могли бути розглянуті значеннями порядку десяти частинок, що різко контрастує із потребами експерименту. Розроблений в дисертації метод дозволяє розширити множинності, для яких можуть бути враховані інтерференційні внески значеннями порядку п'ятдесяти частинок.

Також в роботі пропонуються нові методи побудови Монте-Карло генераторів, що значно розширює можливості застосування методу матричних елементів. Такий метод, має загальновідомі переваги у порівнянні із методом партонних злив, який використовується в існуючих генераторах, але його застосування стримується проблемою великих множинностей, яка може бути розв'язана засобами, що пропонуються в цій роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась у відповідності до держбюджетних науково-дослідних робіт “Розрахунок перерізів непружного розсіяння адронів методом Лапласа” (№ державної реєстрації 0116U004527) та “Розробка методу багаточастинкових

полів для пружного і непружного розсіяння адронів” (номер держ. реєстрації 0119U103982) згідно з програмою науково-дослідних робіт МОН України, програми сумісних досліджень ОНПУ та Інституту ядерних досліджень НАН України, за міжнародними договорами про науково-технічне співробітництво та Майнцським університетом ім. Й. Гутенберга (Німеччина) та Інститутом ядерних досліджень та ядерної енергетики Болгарської академії наук.

При виконанні цих науково-дослідних робіт роль автора дисертації полягала у розробці програм і виконанні аналітичних і чисельних розрахунків, розробці алгоритмів генерування подій та їх комп’ютерній реалізації.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є визначення парціальних перерізів непружного розсіяння адронів в межах мультипериферичної моделі ϕ^3 з урахуванням інтерференційних внесків для множинностей вторинних частинок кількістю до 50 і з’ясування ролі інтерференційних ефектів в експериментально спостережуваній поведінці інклюзивних перерізів протон-протонного розсіяння по бистроті. Іншою метою роботи є побудова методу для Монте-Карло генерації подій на основі методу Лапласа, який враховує інтерференційні ефекти та утворення злив.

Для досягнення сформульованої мети необхідно було розв’язати такі задачі:

- розробити метод врахування інтерференційних внесків для множинностей вторинних частинок кількістю декількох десятків і реалізувати цей метод у вигляді розрахункового алгоритму;
- розрахувати парціальні перерізи непружного розсіяння для множинностей вторинних частинок порядку декількох десятків;
- побудувати динамічні рівняння для двочастинкового глюонного поля;
- розробити і реалізувати алгоритм розрахунку інклюзивних перерізів по бистроті;
- дослідити роль інтерференційних ефектів в зміні із зростанням енергії $\sqrt{s}$ характеру залежності інклюзивного перерізу протон протонного розсі-

яння від швидкості вторинної частинки і з'ясувати фізичний механізм спостережуваних ефектів;

- розробити і реалізувати алгоритм Монте-Карло генерування подій з утворенням декількох десятків вторинних частинок, який враховує наявність у квадрата модуля амплітуди розсіяння точки умовного максимуму за умови збереження енергії-імпульсу;

- розробити і реалізувати модифікацію алгоритму, яка враховує інтерференційні доданки суто алгоритмічним способом;

- аналітично дослідити властивості точки максимуму суми всіх можливих безпетльових діаграм із однією входною і довільною кількістю вихідних ліній, що описують процеси утворення злив;

- дослідити різницю в описі злив методом Лапласа, наближенням ДГЛАП, а також при генерації методом когерентних партонних злив з урахуванням інтерференції м'яких глюонів;

- шляхом чисельних розрахунків дослідити суттєвість інтерференції між різними зливами.

- розробити і реалізувати алгоритм генерації методом матричних елементів процесів із утворенням злив.

Об'єкт дослідження – процеси непружного протон-протонного розсіяння.

Предмет дослідження – інтерференційні ефекти в непружному розсіянні, а також Монте-Карло генерація подій.

Методи дослідження: методи квантової теорії поля для формулювання динамічної моделі; методи діаграмної техніки Р.Фейнмана для побудови наближення для амплітуди розсіяння; методи лінійної алгебри і відповідні чисельні методи для діагоналізації матриць других похідних від логарифму квадрата модуля амплітуди розсіяння в околі точки умовного максимуму; методи теорії ймовірностей і відповідні чисельні методи для генерації гаусівських випадкових величин із заданими математичними очікуваннями і дисперсіями; статистичні методи для обробки результатів Монте-Карло генеру-

вання подій; методи програмування для розробки і реалізації чисельних розрахунків і генерування подій.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому що:

1. Вперше розроблено метод розрахунку інтерференційних внесків, заснований на групуванні внесків із близькими точками максимуму і застосуванні методу Лапласа не для кожного інтерференційного внеску окремо, а для кожної групи внесків.
2. Розроблено новий метод розрахунку інклюзивного перерізу протон-протонного розсіяння по бистроті на основі методу Лапласа та із застосуванням запропонованого методу врахування інтерференційних внесків.
3. Вперше пояснено змінення характеру залежності інклюзивного перерізу по бистроті із зростанням енергії $\sqrt{s}$ саме як інтерференційний ефект і побудована відповідна модель, яка на рівні якісного збігу описує експеримент.
4. Вперше розроблено метод Монте-Карло генерування подій, заснований на методі Лапласа, який дозволяє генерування методом матричних елементів процесів із такими множинностями, які були досяжні лише для генерування методом злив, та двоетапний метод для врахування інтерференційних ефектів при Монте-Карло генеруванні подій.
5. Вперше знайдено факторіальне підсилення константи зв'язку при утворенні злив (на противагу підсиленню ступенями великих логарифмів у наближенні ДГЛАП і результатам Монте-Карло генерування методами когерентних партонних злив з урахуванням інтерференції м'яких глюонів) та пов'язаний з ним новий фізичний механізм виникнення когерентності в багаточастинкових зливах.
6. Вперше розроблено метод Монте-Карло генерації багаточастинкових злив методом матричних елементів.
7. Вперше показано, що при розгляді багаточастинкових злив неможна нехтувати інтерференцією між різними зливами і розроблено метод генерування злив з урахуванням інтерференції між ними.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому що:

- запропоновані в дисертації методи розрахунків, чисельні алгоритми і методи генерування можуть використовуватися для моделювання не тільки процесів протон-протонного розсіяння, а й для опису широкого кола множинних процесів, що вивчаються в сучасних експериментах: глибоко-непружого розсіяння лептонів на адронах, анігіляції лептонів в адрони, множинного випромінювання фотонів в початковому, або в кінцевому стані тощо;
- результати дисертації можуть бути використані для вдосконалення існуючих Монте-Карло генераторів, а також спрощення побудови нових генераторів та алгоритмів для них;
- новий механізм виникнення когерентності, принаймні на рівні ідеї, може розглядатися як основа для побудови лазерів принципово нового типу ніж існуючі, до того ж не тільки фотонних, а й їх аналогів для інших частинок, наприклад, піонів.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що складають основний зміст дисертації, отримано особисто автором, а саме:

- розроблено новий метод розрахунку суми інтерференційних доданків за допомогою методу Лапласа, заснований на групуванні доданків із близькими максимумами в моделі фі-три,
- розроблено метод розрахунку інклюзивного перерізу по бистроті;
- розроблено і реалізовано комп'ютерні програми на основі цих методів;
- знайдено фізичний механізм, що пояснює експериментально спостережувану поведінку інклюзивного перерізу за бистротою із зростанням енергії зіткнення протонів $\sqrt{s}$ як інтерференційний ефект;
- розроблено алгоритм генерації подій на основі методу Лапласа та його модифікацію з урахуванням інтерференційних внесків в межах мультипериферичної моделі фі-три;

– розроблено і реалізовано комп’ютерні програми на основі цих алгоритмів, за допомогою яких проведено генерування подій і в результаті їх обробки отримано інклюзивний переріз по швидкості, який відтворює теоретичний результат і на якісному рівні збігається з експериментальними результатами;

– проведено аналітичне дослідження точки максимуму для суми безпеллових діаграм із однією вхідною і довільною кількістю вихідних ліній і виявлено новий механізм когерентності частинок, оснований на факторіальному підсиленні константи зв’язку.

Сумісно з Волкотрубом Ю.В., Чудак Н.О., Меркотаном К.К., Пташинським Д.А. розроблено і реалізовано алгоритми генерування для найпростішого випадку без врахування інтерференційних внесків, проведено чисельні розрахунки і досліджено властивості моделі непружного розсіяння із глюонними петлями. Сумісно з І.В. Шарфом розроблено ідею методу врахування інтерференційних доданків для діаграм типу гребінка.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертації доповідалися й обговорювалися на International conference Large Hadron Collider Physics 2013 – LHCP- 2013 (Barcelona, Spain, 2013), Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “Diffractive and electromagnetic processes at high energies” (Physikzentrum Bad Honnef, Germany, 2015), Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “QCD-Old Challenges and New Opportunities”, (Physikzentrum Bad Honnef, Germany, 2017), Міжнародній конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика-2018” (Львів, 2018), International Conference of Young Scientists “Problems of Physics and Astronomy” (Baku, Azerbaijan, 2018), Thirteenth Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics CIPANP-2018 (Palm Springs, California, 2018), 18-th Odessa International Astronomical Gamov Conference-School “Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology, Cosmomicrophysics, Astroparticle Physics, Radioastronomy and Astrobiology” (Odessa, Ukraine, 2018), 8th International Workshop on Astronomy

and Relativistic Astrophysics IWARA 2018 (Ollantaytambo, Sacred Valley, Peru, 2018), International Conference "New Trends in High-Energy Physics" (Odessa, Ukraine, 2019).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури і додатка. Загальний обсяг дисертації складає 153 сторінки друкованого тексту, включаючи 41 рисунок. Список літературних джерел містить 144 найменування цитованої літератури.

РОЗДІЛ 1

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В цьому розділі ми покажемо важливість врахування інтерференційних ефектів при описі непружного протон-протонного розсіяння і Монте-Карло генерації подій, а також продемонструємо ефективність методу Лапласа [16] для розв'язку цих задач.

1.1. Суттєвість інтерференційних внесків і проблеми їх врахування.

При розрахунках перерізів непружного розсіяння протонів в межах мультипериферичної моделі [17, 18] зазвичай робиться припущення, що основний внесок в багатовимірний інтеграл вносить мультиреджівська область [1-5] з характерним для неї сильним впорядкуванням по бистротах. В результаті цього припущення в моделях «реджезації» [4, 17-19] робляться наближення, які призводять до того, що при розрахунку перерізів непружного розсіяння інтегрування проводиться по такій області, різні точки якої відповідають суттєво різним значенням енергії-імпульсу, що обговорюється в заключному розділі роботи [10]. В той же час, можна без попередніх припущень знайти область, яка вносить основний внесок в інтеграли, що виражають перерізи. Зокрема в роботах [6-11] показано, що якщо розглянути квадрат модуля внеску мультипериферичної діаграми в амплітуду розсіяння, то він має достатньо різкий умовний максимум за умови точного врахування закону збереження енергії-імпульсу. Точку умовного максимуму можна знайти чисельно, або в певному наближенні аналітично [6] і застосувати до розрахунку інтегралів, що виражають перерізи, відомий метод Лапласа [16]. Відповідно, основний внесок до інтегралу, що визначає переріз, вносить область навколо точки умовного максимуму, яка згідно з методом Лапласа визначається двома похідними від логарифма підінтегрального виразу в цій точці. Ця область виявляється суттєво відмінною від мультиреджівської саме відсутністю

сильного впорядкування по бистротах. Зокрема поблизу порога утворення n вторинних частинок, всі бистроти в точці максимуму приблизно рівні і близькі до нуля, а далі із зростанням енергії $\sqrt{s}$ відстань між ними логарифмічно повільно зростає із зростанням $\sqrt{s}$ [10] і при цьому вона зменшується із зростанням кількості вторинних частинок n . Це призводить до того, що сильне впорядкування по бистротах для певної множинності n може виникнути лише при таких значеннях $\sqrt{s}$, при яких відповідний парціальний переріз розсіяння з утворенням n вторинних частинок зменшиться практично до нуля.

Відсутність сильного впорядкування по бистротах позбавляє сенсу розгляд мультпериферичних діаграм без врахування інтерференційних внесків, що виникають при різних способах приєднання ліній тотожних частинок до діаграми [8, 10], бо у виразі для перерізу ці внески виявляються недостатньо малими, щоб ними можна було знехтувати внаслідок їх величезної кількості. Навпаки, як показано в роботі [8], внесок від «сходінкової» діаграми виявляється набагато меншим за суму решти інтерференційних доданків.

Зазначимо, що в роботах, де використовують припущення про сильне впорядкування по бистротах, і, відповідно, про можливість знехтувати інтерференційними доданками, не наводиться ніяких аргументів з приводу того, чому саме мультиреджівська область повинна вносити основний внесок в інтеграли по фазовому простору кінцевих частинок. У відомій роботі [20] неврахування інтерференційних доданків описується одним реченням про те, що різні частини інтерференційної розрізаної діаграми відмінні від нуля в різних областях фазового простору. Аналогічний підхід використовується в моделі EPOS [21].

Звернемо також увагу на те, що у роботі [22] при розгляді параметризацій експериментальних перерізів адронного розсіяння [22,23], з посиланням на роботи [24, 25], використовують лише Редже-феноменологічні моделі із кратними полюсами Редже. Єдиний зв'язок цих формул з мультиреджівсь-

кими припущеннями полягає в тому, що такі припущення використовують для діаграмного обґрунтування можливості існування у релятивістської амплітуди пружного розсіяння однократних полюсів Редже [17, 26]. Але однократних полюсів Редже недостатньо для опису поведінки перерізів в залежності від енергії $\sqrt{s}$. Кратні полюси Редже, наскільки нам відомо, не мають діаграмного представлення і, відтак, ніяк не пов'язані із мультиреджівськими наближеннями.

Аналогічна ситуація й з найбільш поширеними Монте-Карло генераторами адронних процесів [27-29]. Вони засновані на формулах Редже-феноменологічної теорії [30-32], які не спираються на припущення мультиреджівської кінематики. При цьому враховуються лише внески в амплітуду розсіяння від реджівських полюсів, але не від розрізів [33, 34]. Яким чином використання полюсів Редже із перетинанням більшим за 1 без врахування багатореджійонних розрізів узгоджується із умовою унітарності і обмеженням Фруассара [35] в роботі [27] не пояснюється. Зазначимо також, що модель, яка розглядається в дисертації, суттєво відрізняється від цих моделей не тільки врахуванням інтерференційних внесків, а й з точки зору механізмів зростання перерізів [10]. Щодо генератора Pythia [27, 28], зауважимо також, що хоча більшість уваги приділяється генеруванню саме непружних подій, але повний переріз непружного розсіяння моделюється не як сума перерізів процесів непружного розсіяння, а як різниця між повним перерізом розсіяння і повним перерізом пружного розсіяння, отриманими з Редже-феноменологічних формул, тобто знову ж таки в обхід мультиреджівських припущень. Хоча суто технічно мультиреджівські формули дозволяють генерувати непружні події, але в описі [36] нам не вдалося знайти вказівку на жоден генератор побудований на такому принципі. В генераторах QGSJET і EPOS [21, 37, 38] реджійонні формули використовуються для генерації числа розрізаних реджійонів в багатореджійонному підході Грібова - Редже. Але для розрізання реджійонів використовуються феноменологічні моделі адронізації [39-41], які знову ніяк не пов'язані із мультиреджівськими припущеннями.

1.2. Огляд існуючих підходів до врахування інтерференційних внесків.

Врахування інтерференційних внесків в адрон-адронному розсіянні розглядалося в роботі [42], а також коротко обговорювалося в роботі [43]. Але в цих роботах розгляд проводився в межах наближень, використаних в моделі ABFST [17], де припущення про сильне впорядкування вторинних частинок по бистротах неявно використовується в процесі спрощення границь інтегрування в інтегральному рівнянні для n -частинкового внеску в уявну частину амплітуди пружного розсіяння при нульовій передачі чотириімпульсу. Окрім того, в роботі [42] розглядається розрахунок парціальних перерізів лише для малих множинностей вторинних частинок, коли є можливим їх пряме підсумування. Але із зростанням кількості вторинних частинок кількість інтерференційних внесків факторіально зростає з урахуванням відсутності сильного впорядкування по бистротах суттєво зростає кількість внесків, які потрібно врахувати. Кожен з цих внесків, навіть для великої кількості вторинних частинок, достатньо легко може бути чисельно розрахований методом Лапласа [6-11]. Однак величезна кількість доданків, які треба розрахувати, становить проблему навіть для чисельного розрахунку. Тому метою дисертації є розробка методу наближеного розрахунку, який дозволяє розраховувати суму всіх інтерференційних внесків для достатньо великої кількості вторинних частинок $n \approx 50$.

В сенсі опису експерименту, практично єдиний інтерференційний ефект, що обговорюється в літературі, це кутові Бозе-Ейнштейнівські кореляції [44], або кореляції між чотривекторами енергії-імпульсу тотожних вторинних частинок [45, 46]. Цей ефект здебільшого розглядається з точки зору можливостей експериментального визначення протяжності області випромінювання вторинних частинок [47-49]. Розв'язок цієї задачі не потребує детального опису динамічного механізму непружного процесу [50, 51]. В той же час, саме цим динамічним механізмом модель, яка розглядається в цій роботі,

суттєво відрізняється від моделей [52- 59], які використовувалися для опису інтерференційних ефектів. Ця відмінність полягає в наступному.

Основною проблемою врахування інтерференційних внесків в моделі, яка розглядається, є те, що підінтегральні вирази різних інтерференційних внесків, які є дійсними додатними величинами, досягають максимуму в різних точках. Якби вони мали точку максимуму при однакових значеннях аргументів, то й сума всіх цих внесків мала б одну точку максимуму в цій самій точці. Тоді можна було б застосовувати метод Лапласа не до кожного інтерференційного внеску, а для всієї суми. При цьому, як буде видно з подальшого, із зростанням кількості частинок «гострота» такого максимуму із зростанням кількості частинок тільки зростала б і врахування інтерференційних внесків не становило б проблеми для скільки завгодно великих кількостей вторинних частинок. Натомість, внаслідок того, що різні доданки суми інтерференційних внесків мають різні точки максимуму, їх сума є функцією, яка в залежності від енергії $\sqrt{s}$ і кількості вторинних частинок n може мати настільки велику кількість максимумів, що врахування внеску кожного з них призводить до критичного зростання часу, потрібного для виконання чисельних розрахунків. Окрім того, навіть коли максимумів порівняно мало, для певних $\sqrt{s}$ і n вони можуть ставати недостатньо «гострими», що ускладнює застосування методу Лапласа для обчислення інтегралів, бо для опису форми максимуму виявляється недостатнім обмежуватись квадратичними доданками в розкладі логарифму підінтегрального виразу в околі точки максимуму. Натомість в роботах [52-56, 60-63] розглядаються моделі, в яких приймається, що утворення вторинних частинок відбувається незалежними випромінювачами, а Бозе-Ейнштейнівські кореляції виникають лише на етапі розповсюдження частинок від випромінювачів до детектора. При цьому різні інтерференційні внески є Фур'є-образами однієї й тієї ж функції, взятими в різних точках. В результаті різні інтерференційні внески прийматимуть максимальне значення при одних і тих самих значеннях аргументів, що й означає зовсім інший динамічний механізм, ніж розглянутий в цій роботі. Те ж саме можна

сказати про моделі [53, 56, 57, 59, 63], в яких замість динаміки взаємодіючих полів розглядається задача про поле, що взаємодіє із заданим, або випадковим ланжевенівським джерелом. Тоді розподіл вторинних частинок по імпульсах для довільної їх кількості визначається лише однією функцією - Фур'є - образом зовнішнього джерела, і різні інтерференційні внески досягають максимального значення в одній й тій самій точці. Такі моделі також мають очевидну проблему із явним порушенням симетрії відносно просторово-часового зсуву і, як наслідок, відповідно порушенням закону збереження енергії-імпульсу. Це видно з того, що розподіл за множиністю вторинних частинок виявляється пуасонівським [53] (як й в роботах заснованих на застосуванні мультиреджійної кінематики [64]), що передбачає незалежність між собою процесів утворення вторинних частинок [65] в різних частинах фазового простору і можливість утворення з ненульовою ймовірністю скільки завгодно великої кількості вторинних частинок. Окрім того, моделі із зовнішнім джерелом передбачають подальше усереднення по цьому джерелу з відповідною матрицею густини [55, 66-69]. Однак така матриця густини не знаходиться за допомогою оператора часової еволюції, отриманого з деякої динамічної моделі, а фактично постулюється.

На підставі сказаного раніше можна зробити висновок, що інтерференційні ефекти в протон-протонному розсіянні повинні суттєво проявлятися не тільки в результатах вимірювань Бозе-Ейнштейнівських кореляцій, а й взагалі в усіх величинах, що вимірюються. В дисертації ми збираємось навести аргументи на користь того, що зміна виду залежності інклюзивного перерізу по бистроті (або псевдобистроті) із зростанням енергії з функції, що має один виражений максимум при нульовій бистроті [70, 71] до «плато» і далі до двох симетричних максимумів при ненульових бистротах [72-75, 76 с. 590], може розглядатися як інтерференційний ефект. Експериментальні дані щодо інклюзивних перерізів описувалися за допомогою різних моделей [77-85], однак цей опис не передбачав розгляд інтерференційних ефектів. Прояв інтерференційних ефектів в інклюзивних перерізах по псевдобистротах розглядав-

ся в роботах [61, 56]. Однак в цих роботах такі ефекти розглядаються в наближеннях, які обговорювалися вище, і призводять до того, що різні інтерференційні внески в імпульсному представленні досягають максимуму в одній і тій самій точці. Ми намагатимемось показати, що зміна характеру залежності інклюзивних перерізів від швидкості (псевдошвидкості) із ростом $\sqrt{s}$ пов'язана саме із зміною відстаней між точками максимуму різних інтерференційних доданків. Вищеописана різниця в динамічних механізмах, розглянутих в цій роботі і в [61, 56] яскраво проявляється в різниці виду залежностей інклюзивних перерізів від швидкостей, отриманих в цих моделях.

Отримані в дисертації моделі залежностей повного перерізу протон-протонного (антипротонного) перерізу від $\sqrt{s}$ та інклюзивних перерізів по швидкостях відтворюють експериментальні результати лише на рівні якісного збігу. Це можна пояснити тим, що для моделювання була обрана найпростіша динамічна модель «фі-три» з дійсним скалярним полем, в той час як в експерименті спостерігаються в тому числі й заряджені частинки. Такий вибір обумовлено тим, що метою роботи було розробити і застосувати метод врахування інтерференційних внесків на найпростішій динамічній моделі.

1.3. Огляд існуючих підходів до побудови Монте-Карло генераторів і врахування в них інтерференційних ефектів.

В дисертації ми також збираємось запропонувати новий алгоритм генерації подій непружного розсіювання, заснований на методі Лапласа [9-11, 86, 87].

Як відомо [88], існує два підходи до розв'язку задачі генерації непружних подій - метод матричних елементів і метод злив. З фізичної точки зору метод матричних елементів має перевагу [12], але із зростанням кількості частинок в кінцевому стані, коли зростає розмірність фазового простору, реалізація цього методу стикається з проблемами [27, 89]. Ці проблеми полягають в тому, що потрібно згенерувати одночасно велику кількість взаємно зоре-

льованих нерозривних випадкових величин, які повинні задовольняти жорстким обмеженням, пов'язаним із виконанням закону збереження енергії-імпульсу і умов масової поверхні [90-94]. При цьому потрібно забезпечити щільність покриття фазового простору [95-99].

В дисертаційній роботі ми покажемо, що застосування методу Лапласа спрощує розв'язок вказаних проблем і розширює можливості застосування методу матричних елементів для генерації подій з великими кількостями вторинних частинок.

Як було показано в роботах [9-11, 86, 87], існують типи таких фейнманівських діаграм, що відповідні їм внески в амплітуду розсіяння мають в фізичній області точку умовного максимуму за умови збереження енергії-імпульсу. В околі цієї точки, згідно з методом Лапласа [16], можливе гаусівське наближення для відповідного внеску в амплітуду розсіяння з урахуванням зв'язків між змінними пов'язаним із законом збереження енергії-імпульсу. Ми скористаємось цим фактом для спрощення процедури генерування подій непружного розсіяння адронів. При цьому, ми зосередимось лише на алгоритмічній частині питання, і тому ми розглянемо найпростішу фізичну модель фі три. Але після розгляду запропонованих алгоритмів ми обговоримо можливість застосування цих алгоритмів для діаграм КХД.

При застосуванні методу Лапласа енергії частинок в кінцевому стані підставляються в амплітуду розсіяння вираженими через їх імпульси з умов масової поверхні. Після цього для множини компонент імпульсів в кінцевому стані записуються чотири рівняння, які виражають закон збереження компонент чотиривектору енергії імпульсу в обраній системі відліку. З цих рівнянь чотири компоненти виражаються через решту, і ці вирази підставляються в аналітичний вираз для діаграми Фейнмана. Для модуля отриманого таким чином виразу виконується процедура максимізації. Далі в околі точки максимуму застосовується гаусівське наближення. Діагоналізуючи квадратичну форму в показнику експоненти, ми переходимо до множини одновимірних незалежних гаусівських величин.

Математичні очікування цих величин визначаються значеннями, отриманими з процедури максимізації модуля аналітичного виразу, що відповідає діаграмі. Дисперсії визначаються власними значеннями матриці других похідних від логарифму цього модуля по всіх незалежних змінних, які залишилися після описаного вище врахування умов масової поверхні і закону збереження енергії-імпульсу. Після цього згенеровану таким чином подію оберненим перетворенням можна привести до вихідних координат. Таким чином, за допомогою методу Лапласа можна генерувати непружні події так, що чотири імпульси частинок в кінцевому стані відразу будуть задовольняти потрібним обмеженням. В цьому полягає відмінність пропонованого алгоритму від алгоритмів RAMBO [90-92], SARGE [92, 93] і MAMBO [90, 94], які використовуються в генераторах AMEGIC++ [100] і HELAS [89, 101]. Для того, щоб задовольнити цим обмеженням в згаданих алгоритмах використовуються додаткові процедури, засновані на перетворенні подібності в імпульсному просторі частинок кінцевого стану. Це накладає обмеження на матричні елементи з точки зору їх перетворення при перетворенні подібності.

Для певних видів фейнманівських діаграм, застосування методу Лапласа для генерування подій, в тому виді, як це було описано, стикається з проблемою врахування інтерференційних внесків. Ці внески виникають внаслідок необхідності враховувати діаграми з усіма можливими перестановками ліній тотожних частинок. Питання їх врахування розглядалося в роботах [89, 93, 101-105]. Але при цьому використовувалося безпосереднє підсумування, тобто для заданої кількості тотожних частинок генерувалися усі можливі перестановки індексів аргументів амплітуди розсіяння. Для кожної з можливих перестановок розраховувалося значення амплітуди і розраховувалася сума по всіх перестановках. Звичайно, такий алгоритм стикається з обмеженнями по кількості вторинних частинок, бо навіть зберігання $n!$ перестановок потребує нереального об'єму пам'яті вже для n порядку декількох десятків.

З точки зору застосування методу Лапласа, складність врахування інтерференційних внесків залежить від того, чи змінюється точка максимуму при перестановці аргументів амплітуди розсіяння. Як буде показано далі, існують типи діаграм, для яких максимум досягається за при рівних між собою значеннях незалежних аргументів амплітуди розсіяння. За таких умов врахування інтерференційних внесків методом Лапласа не становить проблеми для будь-якої кількості вторинних частинок і буде розглянуто далі. Генерування подій у такому випадку можна здійснювати описаним вище способом.

Рівність значень імпульсів вторинних частинок в точці максимуму дозволяє використовувати відповідні діаграми для моделювання злив - як партонних в межах КХД, так й адронних - в ефективних теоріях поля [106-109]. Іншими словами, за допомогою методу Лапласа можна генерувати партонні зливи КХД, використовуючи при цьому метод матричних елементів. Таке моделювання суттєво відрізняється від існуючого опису партонних злив [14, 15, 110, 111]. Існуючий метод суттєво прив'язаний к області фазового простору, де поперечні до вісі струменя імпульси послідовно випромінюваних партонів сильно впорядковані. Розгляд саме цієї області обґрунтовується тим, що таким чином досягається підсилення кожного ступеню константи зв'язку відповідним ступенем великого логарифму. Проте, врахування інтерференції, в межах такого підходу, призводить лише до взаємознищення внесків від областей, в яких невпорядковані кути випромінювання партонів [112-114]. Відповідно, при генерування партонних струменів інтерференція враховується лише шляхом сильного впорядкування по кутам випромінювання партонів відносно вісі струменю [115, 116]. В той же час, в межах методу Лапласа внаслідок симетрії точки максимуму відносно перестановок частинок інтерференція призведе до факторіального підсилення константи зв'язку. Зазначимо також, що використання методу Лапласа для генерації партонних злив позбавляє проблеми із поєднанням [117] генерації невеликої кількості партонів методом матричних елементів і наступної генерації методом злив.

З іншого боку, для деяких типів діаграм максимум досягається при різних значеннях незалежних аргументів амплітуди розсіювання. Тоді будь-яка перестановка аргументів змінює розташування точки максимуму. Метод врахування інтерференційних внесків у такому випадку запропоновано в роботі [87]. Далі ми запропонуємо метод генерації подій для такої ситуації.

В роботах [118, 119] описано алгоритми розрахунку амплітуди розсіювання, не пов'язані із її діаграмним представленням, але на певному етапі розгляду все одно використовується розклад по ступенях константи зв'язку. Тому отримана методом [118, 119] амплітуда розсіювання повинна відтворювати доволі складну залежність модуля амплітуди розсіювання від його аргументів з можливістю великої кількості максимумів, пов'язаних із перестановкою аргументів. Втім, в роботі [118] розглядаються процеси, в яких кінцевий стан складений з нетотожних частинок, тому проблеми симетрії амплітуди відносно перестановок не виникає. В роботі [119] кінцевий стан складений тотожними глюонами. Але, нажаль, симетрія амплітуди розсіювання, отриманої описаним в роботі методом не обговорюється. Тобто цікавим є питання, чи є результат розв'язку динамічних рівнянь, запропонованих в [118, 119] відразу симетричною функцією від чотириімпульсів тотожних частинок (глюонів), або ж ця симетрія вводиться додатково при інтегруванні по фазовому простору. Такої симетрії можна було б досягти явно накладаючи на динамічні змінні задачі додаткові зв'язки. Але в будь-якому разі, оскільки кінцевим результатом алгоритмів [118, 119] є амплітуда розсіювання, залишається проблема врахування інтерференційних внесків при інтегруванні по фазовому простору і Монте-Карло генерації подій. З цього приводу цікавим виглядає поєднання методів, викладених в дисертації і застосованих в [118, 119]. Але це ми розглядаємо як задачу на майбутнє.

1.4. Висновки по літературному огляду і постановка задачі дослідження

Розподіли за множинністю, отримані з експериментів на великому адронному колайдері [120-122] показують, що з суттєвими перерізами спостерігаються процеси із утворенням порядку сотень частинок. Ці експериментальні дані показують, що задача врахування інтерференційних внесків є надзвичайно актуальною і водночас надзвичайно складною. Наведений аналіз літератури показує що ця задача, нажаль, знаходиться поза увагою більшості дослідників. Тому перша задача, яку ми збираємося далі розглянути, це розробка методу врахування інтерференційних внесків. Цей метод ми збираємося застосувати для розрахунку інклюзивних перерізів по швидкості вторинних частинок, які мають добре виражені характерні особливості, а також характерно змінюються із зростанням енергії $\sqrt{s}$. У зв'язку із цим виникає задача відтворити за допомогою запропонованого методу ці особливості і з'ясувати, чи можливе їх пояснення саме як інтерференційного ефекту.

Наявність у квадратів модулів амплітуд розсіяння, що моделюються різними типами діаграм Р.Фейнмана, точок умовного максимуму є зручним інструментом для Монте-Карло моделювання подій. Аналіз літератури показує, що цей інструмент ніяк не використовується. Натомість, для генерування багаточастинкових процесів, на нашу думку вимушено, використовується метод партонних злив. Можливості врахування інтерференційних ефектів при використанні цього методу достатньо обмежені, що визначається тим, що метод злив жорстко прив'язаний до розгляду певної області фазового простору. Сам характер цієї області, пов'язаний із сильним впорядкуванням по поперечних до вісі зливи компонентах імпульсів партонів, вже з самого початку виключає суттєві, на наш погляд, інтерференційні ефекти. Тому використання алгоритмів когерентних районних злив замість конвенційних, яке розглядалося вище в огляді літератури, не вирішує проблеми врахування інтерференційних ефектів в зливах. Окрім того, наявні методи розрахунків і генерування

не дають навіть можливості з'ясувати питання, наскільки суттєвою є інтерференція меж різними зливами і це є ще однією задачею, що буде розглянута далі.

У зв'язку із цим ми далі розглядаємо задачі застосування методу Лапласа для побудови алгоритмів Монте-Карло генерування з урахуванням інтерференційних ефектів. При цьому виникають суто алгоритмічні можливості цього урахування, тобто такі можливості, які не можуть бути реалізовані ані за допомогою аналітичних, ані за допомогою чисельних розрахунків, а лише за допомогою генерування подій. Як застосування алгоритмів Монте-Карло генерації буде розглянута задача моделювання результатів експерименту з вимірювання інклюзивного перерізу вторинних частинок по швидкості, аналогічна тій, що вище обговорювалася з позиції чисельних розрахунків.

РОЗДІЛ 2

РОЗРОБКА МЕТОДУ ВРАХУВАННЯ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНИХ ВНЕСКІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ЛАПЛАСА

При подальшому розгляді будемо вважати, що усі вторинні частинки мають однакову масу та дорівнюють масі піона m_π . Крім того, зауважимо, що всі фізичні величини, що використовуються у цьому розділі, нормовані на масу піона m_π . Розглянемо так звані діаграми типу «гребінка» для непружного pp (протон-протонного) розсіяння в рамках моделі φ^3 з дійсним скалярним полем (рис 2.1).

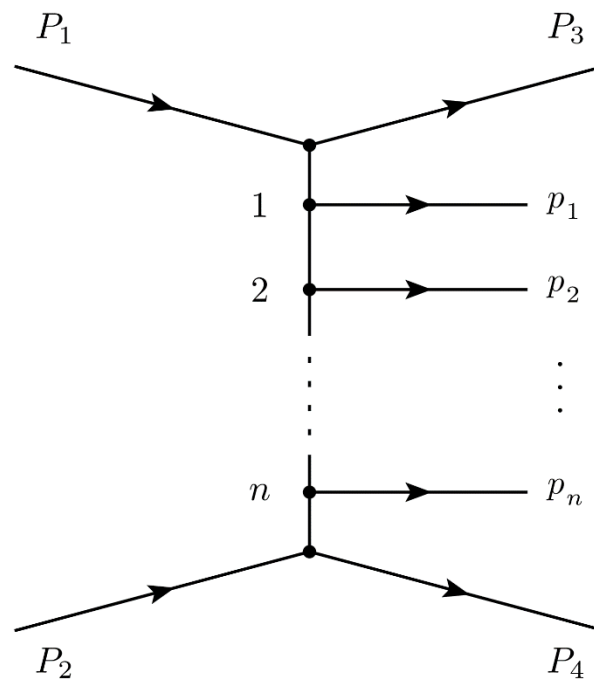


Рис. 2.1. Фейнманівська діаграма типу «гребінка» в рамках моделі φ^3 для непружного розсіяння $2 \rightarrow 2 + n$.

Згідно з теоремою Віка, для побудови амплітуди розсіяння такого процесу ми маємо врахувати усі можливі способи приєднання ліній вторинних

частинок $p_1, \dots, p_n$ до вершин діаграми $1, 2, \dots, n$. Для цього зручно ввести наступні позначення.

Позначимо через S_n множину усіх можливих перестановок послідовності елементів $\mathbb{N}_n = (1, 2, \dots, n)$, що дозволить формалізувати процес побудови усіх можливих діаграм виду (рис. 2.1) шляхом перебору усіх можливих елементів множини S_n . Оскільки на кожній такій діаграмі маємо n вершин, до яких необхідно приєднати n вторинних частинок, то кожен елемент $\pi \in S_n$ визначає унікальний порядок, у якому лінії вторинних частинок приєднуються до вершин діаграми: $\pi(i)$ - визначає індекс вторинної частинки, яка приєднується до i вершини (рис. 2.2).

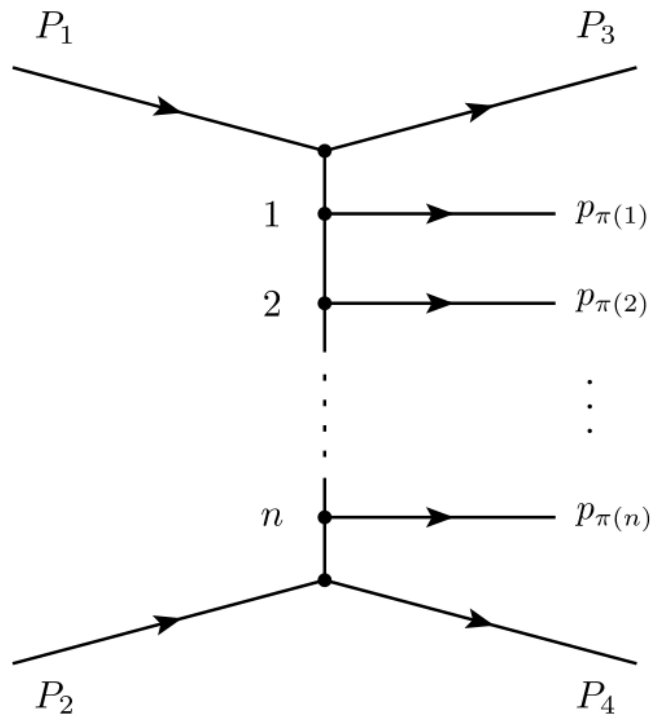


Рис. 2.2. Діаграма, що відповідає деякому елементу $\pi \in S_n$.

Кожній діаграмі виду (рис. 2.2), а отже й кожній перестановці $\pi \in S_n$, відповідає аналітичний вираз – адитивний внесок у амплітуду розсіяння.

$$a_n(P_1, P_2, P_3, P_4, p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(n)}), \quad (2.1)$$

де P_1, P_2 – чотириімпульси первинних частинок в початковому стані, P_3, P_4 – чотириімпульси первинних частинок в кінцевому стані, та $p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(n)}$ – чотириімпульси вторинних частинок в кінцевому стані. Тоді, згідно з правилами діаграмної техніки Фейнмана (теоремою Віка), амплітуда розсіяння T_n процесу, що розглядається, є сумою відповідних виразів a_n по множині S_n

$$T_n(P_1, P_2, P_3, P_4, p_1, \dots, p_n) = \sum_{\pi \in S_n} a_n(P_1, P_2, P_3, P_4, p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(n)}). \quad (2.2)$$

Кожний доданок у виразі (2.2) є функцією від $4(n+4)$ змінних, проте не усі вони є незалежними – усі ці чотириімпульси відповідають дійсним частинкам, а отже задовольняють умові масової поверхні

$$\begin{aligned} (P_i)_0^2 &= M_i^2 + \mathbf{P}_i^2 \\ (p_i)_0^2 &= m^2 + \mathbf{p}_i^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де M_i – маса i -ої первинної частинки та m – маса вторинної частинки. Це дає змогу виразити компоненти $(P_i)_0$ і $(p_i)_0$ через відповідні просторові компоненти $\mathbf{P}_i$ та $\mathbf{p}_i$. Крім того, врахуємо, що в обраній системі відліку компоненти $(\mathbf{P}_1)_x = (\mathbf{P}_2)_x = 0$, $(\mathbf{P}_1)_y = (\mathbf{P}_2)_y = 0$ та $(\mathbf{P}_1)_z = -(\mathbf{P}_2)_z$.

Таким чином, обидва чотириімпульси P_1 та P_2 однозначно задаються однією величиною $\sqrt{s} = (P_1)_0 + (P_2)_0$ – повною енергією первинних частинок в системі центру мас. Щодо компонент вторинних частинок, в якості незалежних компонент ми приймемо $(\mathbf{p}_i)_x$, $(\mathbf{p}_i)_y$ та швидкості вторинних частинок y_i , що визначаються наступними співвідношеннями

$$(\mathbf{p}_i)_z = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_i)_x^2 + (\mathbf{p}_i)_y^2} \sinh(y_i). \quad (2.4)$$

З виразів (2.4) та (2.3) видно, що усі компоненти чотири-імпульсів вторинних частинок задаються шляхом завдання відповідних величин $(\mathbf{p}_i)_x$, $(\mathbf{p}_i)_y$ та y_i .

Точне врахування закону збереження енергії імпульсу (2.5) дає додаткове обмеження на можливі значення компонент чотири-імпульсів частинок у кінцевому стані, і тим самим дозволяє зменшити кількість незалежних величин.

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + \sum_{i=1}^n p_i \quad (2.5)$$

Останнім кроком введемо величини P_x^a та P_y^a , що визначаються наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned} P_x^a &= (\mathbf{P}_3)_x - (\mathbf{P}_4)_x \\ P_y^a &= (\mathbf{P}_3)_y - (\mathbf{P}_4)_y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Остаточно, враховуючи (2.3), (2.5) та (2.6), можна показати, що усі компоненти чотири-імпульсів, що є аргументами виразів (2.1) та (2.2), однозначно визначають шляхом завдання одразу усіх наступних незалежних величин:

$$\sqrt{s}, y_1, \dots, y_n, (\mathbf{p}_1)_x, \dots, (\mathbf{p}_n)_x, (\mathbf{p}_1)_y, \dots, (\mathbf{p}_n)_y, P_x^a, P_y^a. \quad (2.7)$$

Отже замість $4(n+4)$ змінних ми отримали $3n+3$ незалежні змінні і вираз (2.1) можна переписати наступним чином

$$a_n \left(\sqrt{s}, y_1, \dots, y_n, (\mathbf{p}_1)_x, \dots, (\mathbf{p}_n)_x, (\mathbf{p}_1)_y, \dots, (\mathbf{p}_n)_y, P_x^a, P_y^a \right). \quad (2.8)$$

Проте, для компактності записів, виявляється зручним розглядати нові незалежні змінні (окрім $\sqrt{s}$) як компоненти деякого вектора $X \in \mathbb{R}^{3n+2}$

$$X = \left(y_1, \dots, y_n, (\mathbf{p}_1)_x, \dots, (\mathbf{p}_n)_x, (\mathbf{p}_1)_y, \dots, (\mathbf{p}_n)_y, P_x^a, P_y^a \right). \quad (2.9)$$

Нарешті, з урахуванням введених позначень, вираз (2.8) можна записати у компактному вигляді

$$a_n(\sqrt{s}, X). \quad (2.10)$$

Щоб записати вираз (2.2), використовуючи нові позначення, необхідно попіклуватись про те, як саме в цих позначеннях записувати вирази $a_n(\sqrt{s}, X)$, що відповідають різним перестановкам (діаграмам). Для цього кожній перестановці $\pi \in S_n$ поставимо у відповідність оператор $\hat{\pi} : \mathbb{R}^{3n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{3n+2}$, який кожному вектору $X \in \mathbb{R}^{3n+2}$ ставить у відповідність певний вектор $\hat{\pi}X = X' \in \mathbb{R}^{3n+2}$ за наступним правилом:

$$\hat{\pi}X = \begin{pmatrix} \underbrace{X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}}_{1, \dots, n}, \underbrace{X_{n+\pi(1)}, \dots, X_{n+\pi(n)}}_{n+1, \dots, 2n}, \\ \underbrace{X_{2n+\pi(1)}, \dots, X_{2n+\pi(n)}}_{2n+1, \dots, 3n}, X_{3n+1}, X_{3n+2} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

X	$\rightarrow$	$\hat{\pi}X$
$X_1, X_2, \dots, X_n$		$X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(n)}$
$X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{2n}$		$X_{n+\pi(1)}, X_{n+\pi(2)}, \dots, X_{n+\pi(n)}$
$X_{2n+1}, X_{2n+2}, \dots, X_{3n}$		$X_{2n+\pi(1)}, X_{2n+\pi(2)}, \dots, X_{2n+\pi(n)}$
X_{3n+1}, X_{3n+2}		X_{3n+1}, X_{3n+2}

Рис. 2.3. Схематичне зображення дії оператора перестановки $\hat{\pi}$. Компоненти $1, \dots, n$, $n+1, \dots, 2n$ та $2n+1, \dots, 3n$ переставляються згідно з перестановкою π .

Інакше, новий вектор $\hat{\pi}X$ складається з компонент вектора X , переставлених у порядку, що визначається перестановкою π (рис. 2.3). При цьому компоненти $1, \dots, n$, компоненти $n+1, \dots, 2n$, та компоненти $2n+1, \dots, 3n$ переставляються окремо відповідно до перестановки π , а останні дві компоне-

нти вектора залишаються незмінними. Іншими словами, оператор $\hat{\pi}$ можна визначити наступним чином

$$\begin{cases} (\hat{\pi}X)_{in+j} = X_{in+\pi(j)}, & \text{для } i = 0 \dots 2, j = 1 \dots n \\ (\hat{\pi}X)_i = X_i, & \text{для } i = 3n+1, 3n+2 \end{cases}. \quad (2.12)$$

Варто також розглянути послідовну дію двох таких операторів на деякий вектор $\hat{\pi}_2\hat{\pi}_1X$. Оскільки множина перестановок S_n утворює групу, то легко показати, що за нашим визначенням оператора $\hat{\pi}$ множина усіх таких операторів також утворює групу. Тоді добуток операторів $\hat{\pi}_2\hat{\pi}_1$, також є деяким оператором перестановки $\hat{\pi}_3$. Виникає питання, якій саме перестановці $\pi \in S_n$ відповідає оператор $\hat{\pi}_3$. З'ясуємо це.

За визначенням (2.12) оператора $\hat{\pi}$, розпишемо дію оператора $\hat{\pi}_2$ на вектор $\hat{\pi}_1X$

$$(\hat{\pi}_3X)_{in+j} = (\hat{\pi}_2[\hat{\pi}_1X])_{in+j} = (\hat{\pi}_1X)_{in+\pi_2(j)}. \quad (2.13)$$

Розпишемо аналогічно дію оператора $\hat{\pi}_1$, позначивши тимчасово для ясності $k = \pi_2(j)$

$$\begin{aligned} (\hat{\pi}_3X)_{in+j} &= (\hat{\pi}_1X)_{in+k} = X_{in+\pi_1(k)} = X_{in+\pi_1(\pi_2(j))} \\ (\hat{\pi}_2\hat{\pi}_1X)_{in+j} &= X_{in+(\pi_1 \circ \pi_2)(j)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

де через $\pi_1 \circ \pi_2$ позначено композицію (добуток) перестановок, тобто таку перестановку, що для усіх $i \in (1, 2, \dots, n)$ отримаємо $(\pi_1 \circ \pi_2)(i) = \pi_1(\pi_2(i))$. Отже, добуток операторів $\hat{\pi}_2\hat{\pi}_1$ відповідає перестановці $\pi_1 \circ \pi_2$ (і навпаки).

$$\hat{\pi}_2\hat{\pi}_1 \leftrightarrow \pi_1 \circ \pi_2 \quad (2.15)$$

Крім того, оскільки множина перестановок S_n утворює групу відносно операції множення, то в ній обов'язково існує одиничний елемент ε , тобто такий, що $\varepsilon(i) = i$ для усіх $i \in (1, 2, \dots, n)$. Також для кожної перестановки

$\pi \in S_n$ знайдеться обернена перестановка $\pi^{-1} \in S_n$ така, що $\pi^{-1} \circ \pi = \pi \circ \pi^{-1} = \varepsilon$.

З визначення (2.14) оператора $\hat{\pi}$ легко показати, що обернений до нього оператор $\hat{\pi}^{-1}$ відповідає перестановці π^{-1} .

Тепер ми можемо переписати вираз (2.2) в наступному вигляді

$$T_n(\sqrt{s}, X) = \sum_{\pi \in S_n} a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X), \quad (2.16)$$

де $\hat{\pi}$ – оператор перестановки, що відповідає перестановці $\pi \in S_n$.

Перейдемо тепер до розгляду виразу для парціальних перерізів розсіяння σ_n непружних процесів та запишемо його, використовуючи введені позначення

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \frac{(2\pi)^4}{4n!I} \int \frac{d\mathbf{P}_3}{(2\pi)^3 2(P_3)_0} \frac{d\mathbf{P}_4}{(2\pi)^3 2(P_4)_0} \prod_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2(p_i)_0} \times \\ & \times \delta^4 \left(P_1 + P_2 - P_3 - P_4 - \sum_{i=1}^n p_i \right) \\ & \times |T_n(P_1, P_2, P_3, P_4, p_1, \dots, p_n)|^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де $I = \sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}$.

Для подальших розрахунків в першу чергу необхідно проінтегрувати дельта-функції у виразі (2.17), які забезпечують дотримання закону збереження енергії-імпульсу при інтегруванні. Ця процедура детально описана у роботі [10]. В результаті отримаємо вираз, який залежатиме лише від змінних (2.7). При цьому Якобіан переходу до цих змінних та інші множники, що утворюються в результаті інтегрування дельта-функцій, можуть бути включені у функцію T_n , не змінюючи властивостей цієї функції, суттєвих для подальших розрахунків. Остаточно, у нових позначеннях вираз (2.17) приймає вигляд:

$$\sigma_n(\sqrt{s}) = R(n, \sqrt{s}) \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i \left| T_n(\sqrt{s}, X) \right|^2, \quad (2.18)$$

$$\text{де } R(n, \sqrt{s}) = \frac{(2\pi)^4}{4n!I}.$$

Підставимо вираз (2.16) у вираз (2.18) для парціальних перерізів і отримаємо

$$\sigma_n(\sqrt{s}) = R(n, \sqrt{s}) \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i \sum_{\pi_k \in S_n} \sum_{\pi_l \in S_n} \left[a_n^*(\sqrt{s}, \hat{\pi}_k X) a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_l X) \right]. \quad (2.19)$$

Одна з сум у підінтегральному виразі (2.19) може бути легко врахована шляхом заміни змінних, наприклад, $X \rightarrow \hat{\pi}_k^{-1} X$. Оскільки сумування в обох сумах проводиться по усій множині S_n , то така заміна вплине лише на порядок доданків у другій сумі, що не вплине на значення інтеграла. При цьому в першій сумі отримаємо $n!$ однакових доданків. Враховуючи це, вираз (2.19) можна записати наступним чином

$$\sigma_n(\sqrt{s}) = R(n, \sqrt{s}) n! \sum_{\pi \in S_n} \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i a_n^*(\sqrt{s}, X) a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X). \quad (2.20)$$

Кожний доданок у виразі (2.20) називається *інтерференційним внеском* у переріз розсіяння. З останнього виразу видно, що кожен такий внесок характеризується певною перестановкою π . Інакше кажучи, кожна перестановка π визначає деякий інтерференційний внесок, який зручно представляти за допомогою так званих «розрізаних» діаграм (рис. 2.4).

Як це видно з виразу (2.20), розрахунок кожного інтерференційного внеску зводиться до розрахунку багатовимірного інтегралу по складній області, яка визначається законом збереження енергії-імпульсу. Кожен окремий інтерференційний внесок може бути розрахований за допомогою метода Лапласа [10]. Цей метод дозволяє розраховувати багатовимірні інтеграли у вираз для інтерференційних внесків за умови, що підінтегральний вираз має єдину точку максимуму.

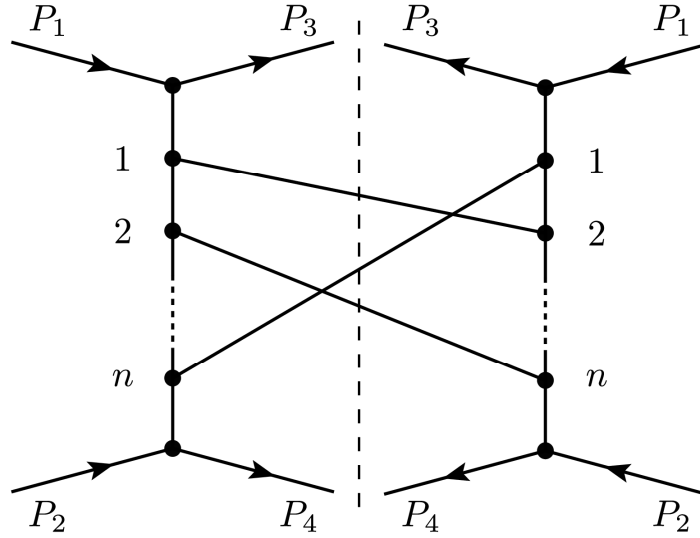


Рис. 2.4. Розрізана діаграма для інтерференційного внеску, що характеризується деякою перестановкою π , такою, що $\pi(1) = n$, $\pi(2) = 1, \dots$, та $\pi(n) = 2$.

Ідея, що лежить в основі нового методу врахування інтерференційних внесків, тісно пов'язана з методом Лапласа, тому для повноти викладення коротко опишемо алгоритм метода Лапласа в рамках введених позначень на прикладі деякого інтерференційного внеску (2.21) (для більш вичерпного опису самого метода див. [10]).

$$C_{\pi}(\sqrt{s}) = \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i a_n^*(\sqrt{s}, X) a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X) \quad (2.21)$$

Перш за все відмітимо, що в рамках розглядуваної моделі функція $a_n(\sqrt{s}, X)$ має єдину точку умовного максимуму $X^{(0)}$, що детально описано в роботі [10]. При цьому легко показати, що функція $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X)$ приймає максимальне значення в точці $\hat{\pi}^{-1} X^{(0)}$. Дійсно, значення функцій $a_n(\sqrt{s}, X)$ і $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X)$ в точці X можна розглядати як значення однієї функції $a_n(\sqrt{s}, X)$ в двох різних точках X та $X^{(0)}$. Тому функція $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X)$ буде

приймати максимальне значення в такій точці X , що $\hat{\pi}X = X^{(0)}$. Звідси отримуємо, що точка $X = \hat{\pi}^{-1}X^{(0)}$ є точкою максимуму функції $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$. Також зауважимо, що функція $a_n(\sqrt{s}, X)$ добре описується рядом Тейлора з урахуванням вкладів другого порядку.

Першим кроком чисельно знаходимо точку максимуму функції $a_n(\sqrt{s}, X)$. Після чого функція $a_n(\sqrt{s}, X)$ представляється у вигляді

$$a_n(\sqrt{s}, X) = \exp[\ln a_n(\sqrt{s}, X)], \quad (2.22)$$

а показник експоненти $\ln a_n(\sqrt{s}, X)$ розкладається в ряд Тейлора в околі точки максимуму $X^{(0)}$ з точністю до вкладів другого порядку по X .

$$\begin{aligned} \ln a_n(\sqrt{s}, X) &= \ln a_n(\sqrt{s}, X^{(0)}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3n+2} \sum_{b=1}^{3n+2} \frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_a \partial X_b}(\sqrt{s}, X^{(0)}) (X - X^{(0)})_a (X - X^{(0)})_b \end{aligned} \quad (2.23)$$

Зауважимо, що у виразі (2.23) відсутні доданки, що відповідають вкладам першого порядку по X , оскільки в точці максимуму $X^{(0)}$ функції $\ln a_n(\sqrt{s}, X)$ усі перші похідні $\frac{\partial \ln a_n}{\partial X_a}(\sqrt{s}, X^{(0)})$ дорівнюють нулю. Аналогічна процедура проводиться для другого множника в підінтегральному виразі (2.21) – функція $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$ також розкладається в околі своєї точки максимуму $\hat{\pi}^{-1}X^{(0)}$. Для зручності функцію $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$ будемо позначати як $b_n^\pi(\sqrt{s}, X)$.

$$b_n^\pi(\sqrt{s}, X) = a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X) \quad (2.24)$$

При цьому другі похідні від функції $\frac{\partial^2 \ln b_n^\pi}{\partial X_a \partial X_b}(\sqrt{s}, \hat{\pi}^{-1} X^{(0)})$ можна легко отримати, перетворивши відповідним чином вже розраховані похідні $\frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_a \partial X_b}(\sqrt{s}, X^{(0)})$. Для цього розглянемо доданки другого порядку по X у правій частині виразу (2.23) в точці $\hat{\pi} X$

$$\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3n+2} \sum_{b=1}^{3n+2} \frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_a \partial X_b}(\sqrt{s}, X^{(0)}) \left(\hat{\pi} X - X^{(0)} \right)_a \left(\hat{\pi} X - X^{(0)} \right)_b. \quad (2.25)$$

Перетворимо останній вираз таким чином, щоб «звільнити» X від дії оператора $\hat{\pi}$. Для цього представимо $X^{(0)} = \hat{\pi} \hat{\pi}^{-1} X^{(0)}$ та скористаємось визначенням (2.14) оператора $\hat{\pi}$ і для простоти обмежимося розглядом лише перших n доданків у сумі по a і b .

$$\frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_a \partial X_b}(\sqrt{s}, X^{(0)}) \left(X - \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right)_{\pi(a)} \left(X - \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right)_{\pi(b)}. \quad (2.26)$$

Замінивши змінні сумування a і b на $i = \pi(a)$ та $j = \pi(b)$, отримаємо

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_{\pi^{-1}(i)} \partial X_{\pi^{-1}(j)}}(\sqrt{s}, X^{(0)}) \left(X - \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right)_i \left(X - \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right)_j. \quad (2.27)$$

Звідки видно, що відповідні коефіцієнти при доданках другого порядку у виразі (2.27) і є другими похідними $\frac{\partial^2 \ln b_n^\pi}{\partial X_a \partial X_b}(\sqrt{s}, \hat{\pi}^{-1} X^{(0)})$. Отже, коефіцієнти при вкладах другого порядку у ряді Тейлора функції $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X)$ визначаються з наступного співвідношення

$$\frac{\partial^2 \ln b_n^\pi}{\partial X_a \partial X_b}(\sqrt{s}, \hat{\pi}^{-1} X^{(0)}) = \frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_{\pi^{-1}(a)} \partial X_{\pi^{-1}(b)}}(\sqrt{s}, X^{(0)}), \quad (2.28)$$

де a і $b = 1 \dots n$, аналогічно виражаються компоненти інших блоків відповідно до визначення оператора перестановки. А саме,

$$\frac{\partial^2 \ln b_n^\pi}{\partial X_{in+a} \partial X_{jn+b}} \left(\sqrt{s}, \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right) = \frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_{in+\pi^{-1}(a)} \partial X_{jn+\pi^{-1}(b)}} \left(\sqrt{s}, X^{(0)} \right), \quad (2.29)$$

де $i, j = 0 \dots 2$ і $a, b = 1 \dots n$.

Зауважимо також, що останні компоненти матриці других похідних функції $b_n^\pi(\sqrt{s}, X)$ співпадають з відповідними компонентами матриці других похідних функції $a_n(\sqrt{s}, X)$. Таким чином, інтерференційний внесок (2.21) може бути приблизно розрахований за формулою

$$\begin{aligned} C_\pi(\sqrt{s}) &\approx a_n^2(\sqrt{s}, X^{(0)}) \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i \\ &\times \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3n+2} \sum_{b=1}^{3n+2} d_{ab} \left(X - X^{(0)} \right)_a \left(X - X^{(0)} \right)_b \right] \\ &\times \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3n+2} \sum_{b=1}^{3n+2} d_{\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b)} \left(X - \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right)_a \left(X - \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right)_b \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{де } d_{ab} = \frac{\partial^2 \ln a_n}{\partial X_a \partial X_b} \left(\sqrt{s}, X^{(0)} \right).$$

Кожен із добутоків у підінтегральному виразі (2.30) є гаусівською функцією, тому увесь добуток також є гаусівською функцією і має єдину точку максимуму, яка може бути знайдена чисельно, або знайдена з розв'язку наступної системи рівнянь

$$\sum_{a=1}^{3n+2} \left[d_{ab} \left(X - X^{(0)} \right)_b + d_{\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b)} \left(X - \hat{\pi}^{-1} X^{(0)} \right)_b \right] = 0, \quad (2.31)$$

для $a = 1 \dots 3n + 2$.

Враховуючи це, вираз (2.30) можна представити у вигляді

$$C_{\pi}(\sqrt{s}) \approx a_n^2(\sqrt{s}, X^{(0)}) \times \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i \exp \left[\sum_{a=1}^{3n+2} \sum_{b=1}^{3n+2} D_{ab} \left(X - X^{(\pi)} \right)_a \left(X - X^{(\pi)} \right)_b \right], \quad (2.32)$$

де коефіцієнти $D_{ab} = d_{ab} + d_{\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b)}$, а $X^{(\pi)}$ – точка максимуму підінтегрального виразу (2.30) інтерференційного внеску $C_{\pi}(\sqrt{s})$, який характеризується певною перестановкою π .

Остаточно, вираз (2.32) представляє собою багатовимірний гаусівський інтеграл і може легко бути розрахований за наступною формулою

$$C_{\pi}(\sqrt{s}) \approx a_n^2(\sqrt{s}, X^{(0)}) \sqrt{\frac{(2\pi)^{3n+2}}{\det D}}. \quad (2.33)$$

Попри той факт, що кожен інтерференційний внесок може бути розрахований за допомогою метода Лапласа (2.33), кількість обчислень, необхідних для розрахунку парціальних перерізів (2.20) неймовірно швидко зростає з ростом енергії. Кількість доданків у сумі (2.20) дорівнює $n!$, а з ростом енергії $\sqrt{s}$ зростає кількість вторинних частинок n , що можуть утворитись в результаті непружного процесу. При цьому розрахунок парціальних перерізів є необхідним для подальшого використання у Монте-Карло генераторі процесів розсіяння. Тому виникає необхідність при розробці метода врахування великої кількості інтерференційних внесків для чого може бути взята простіша модель φ^3 . При цьому застосування цього метода не повинно обмежуватись лише цією моделлю, а й допускати більш складні й реалістичні моделі як, наприклад, модель багаточастинкових полів [106, 123 - 125], розрахунки в рамках якої можна звести до розрахунків у φ^3 (див. [11] і [126]).

Почнемо опис нового методу з розгляду властивостей точок максимуму підінтегральних виразів інтерференційних внесків $C_{\pi}(\sqrt{s})$ і квадрата модуля амплітуди розсіяння у цілому.

2.1. Розташування точок максимуму квадрату модуля амплітуди розсіяння з урахуванням інтерференційних внесків і розбиття множини вторинних частинок на групи.

Як вже було показано, амплітуда розсіяння $T_n(\sqrt{s}, X)$ непружного процесу, який зображено на рис. 2.1, є сумою великої кількості доданків $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$, кожен із яких має єдину точку максимуму

$$T_n(\sqrt{s}, X) = \sum_{\pi \in S_n} a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X). \quad (2.34)$$

У роботах [6, 9, 10] показано, що точка максимуму $X^{(0)}$ функції $a_n(\sqrt{s}, X)$ має певні властивості, а саме:

1. Бистроти вторинних частинок у точці максимуму утворюють арифметичну прогресію

$$y_i^{(0)} = y_1^{(0)} - \Delta_y(i-1), \text{ де} \quad (2.35)$$

$$y_1^{(0)} = \frac{n-1}{2} \Delta_y, \text{ та} \quad (2.36)$$

$$\Delta_y = \frac{2}{n+1} \operatorname{arcosh} \left(\frac{\sqrt{s} - n}{2M} \right).$$

Звідки видно, що $y_i^{(0)} = -y_{n-i}^{(0)}$. Нагадаємо, що всюди використовуються фізичні величини, обезрозмірені на масу піона m , тому різниця $\sqrt{s} - n \rightarrow 2M$, коли енергія $\sqrt{s}$ прямує до порогової енергії непружного процесу з утворенням n вторинних частинок $\sqrt{s_t} = 2M + n$, в результаті чого різниця арифметичної прогресії бистрот Δ_y прямує до нуля.

2. Поперечні компоненти імпульсів вторинних частинок у точці максимуму дорівнюють нулю

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_x)_i &= (\mathbf{p}_y)_i = 0 \\ P_a^X &= P_a^Y = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Розглянемо вираз (2.34), враховуючи властивості точки максимуму $X^{(0)}$. Як вже було показано, кожний доданок $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$ у цій сумі відповідає певній перестановці π і досягає максимального значення в єдиній точці $\hat{\pi}^{-1}X^{(0)}$. Розглянемо відстань між точками максимуму доданків суми (2.34), використовуючи звичайну метрику в багатовимірному евклідовому просторі

$$\rho_{ij} = \rho\left(\hat{\pi}_i^{-1}X^{(0)}, \hat{\pi}_j^{-1}X^{(0)}\right) = \sqrt{\sum_{l=1}^{3n+2} \left(\hat{\pi}_i^{-1}X^{(0)} - \hat{\pi}_j^{-1}X^{(0)}\right)_l^2}. \quad (2.38)$$

Враховуючи (2.35) і (2.37), отримаємо

$$\rho_{ij} = |\Delta_y| \sqrt{\sum_{l=1}^n \left(\pi_i^{-1}(l) - \pi_j^{-1}(l)\right)^2}. \quad (2.39)$$

Звідки видно, з урахуванням (2.36), що $\Delta_y \approx 0$, відстань між точками максимуму доданків суми (2.34) зростає з ростом енергії $\sqrt{s}$ (рис. 2.5 - 2.6).

При енергії, близькій до порогової енергії непружного процесу, відстані між точками максимуму усіх доданків у сумі (2.34) достатньо малі, щоб уся їх сума також мала єдину точку максимуму. В цьому випадку метод Лапласа може бути застосований не до кожного окремого інтерференційного внеску (2.21), а одразу до суми всіх інтерференційних внесків (2.40).

$$\sigma_n(\sqrt{s}) = R(n, \sqrt{s}) \sum_{\pi \in S_n} \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i \left| T_n(\sqrt{s}, X) \right|^2. \quad (2.40)$$

З ростом енергії при фіксованому n відстані між точками максимуму доданків у виразі (2.34) зростають та єдиний максимум, що спостерігався при низьких енергіях, перетворюється на кілька окремих максимумів. Цей ефект можна легко побачити, розглянувши графік функції амплітуди розсіяння

вздовж деякого напрямку. Оберемо такий напрямок, що буде поєднувати дві найвіддаленіші одна від одної точки максимуму доданків суми (2.34).

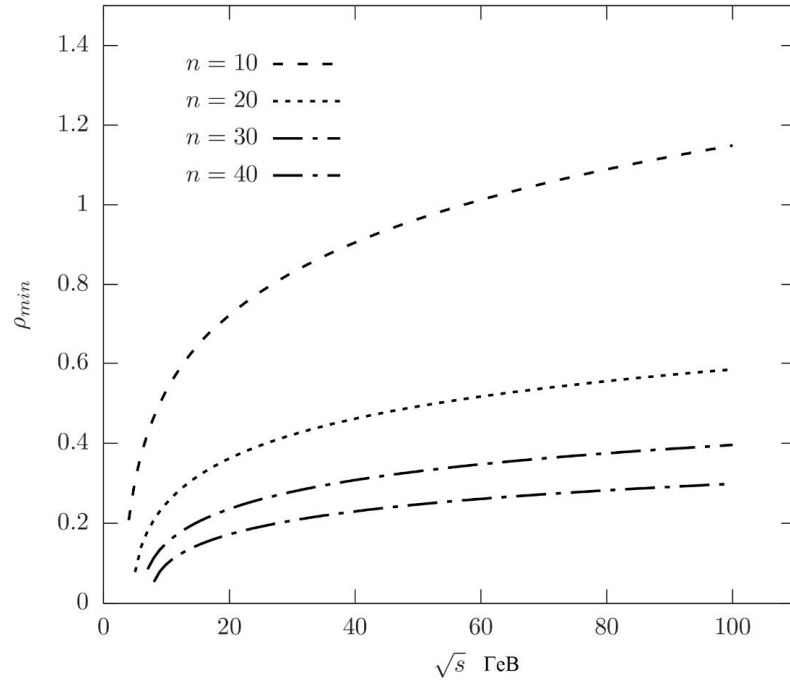


Рис. 2.5. Залежність мінімальної відстані між точками максимуму доданків суми (2.34) з ростом енергії при різних кількостях вторинних частинок n .

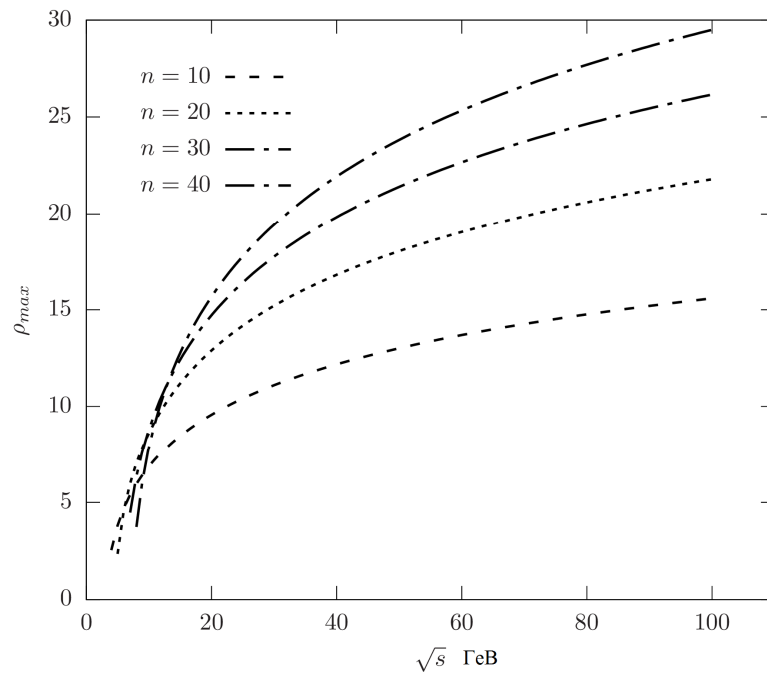


Рис. 2.6. Залежність максимальної відстані між точками максимуму доданків суми (2.34) з ростом енергії при різних кількостях вторинних частинок n .

Таким чином, будемо спостерігати ефект, коли в амплітуді розсіяння один максимум переходить у кілька окремих максимумів. Такий напрямок задається вектором з координатами $v_i = \left(\hat{\pi}_2^{-1} X^{(0)} - \hat{\pi}_1^{-1} X^{(0)} \right)_i$, де $\pi_1(i) = i$, а $\pi_2(i) = n - i$, для усіх $i = 1 \dots n$. На рис. 2.7 представлено графік, на якому при різних значеннях енергії $\sqrt{s}$ розглядається залежність амплітуди розсіяння $T_n(\sqrt{s}, X)$ в околі точки $X = (0, \dots, 0)$ в напрямку вектора $\mathbf{v}$.

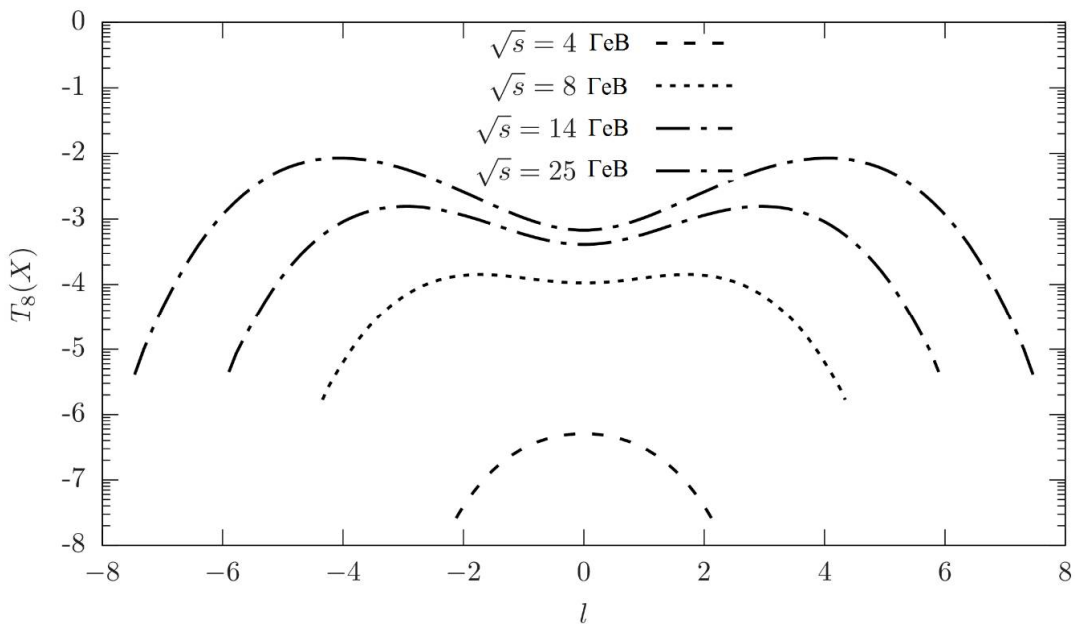


Рис. 2.7. Графік залежності амплітуди розсіяння $T_n(\sqrt{s}, X)$ вздовж напрямку, що поєднує дві найбільш віддалені точки максимуму доданків суми (2.34) при $n = 8$ та різних значеннях енергії у логарифмічній шкалі.

В результаті того, що з ростом енергії функція $T_n(\sqrt{s}, X)$ починає приймати максимальне значення в декількох різних точках, втрачається можливість застосовувати метод Лапласа одразу до виразу (2.40), оскільки й квадрат модуля $|T_n(\sqrt{s}, X)|^2$ у підінтегральному виразі (2.40) також досягатиме максимального значення більш ніж в одній точці. Іншими словами виникає

необхідність розгляду доданків $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$ суми (2.34). Оскільки кожний такий доданок приймає максимальне значення при нульових поперечних імпульсах (2.37), тобто $\left[\hat{\pi}^{-1}X^{(0)}\right]_i = 0$ при $i > n$, то поки що далі будемо розглядати лише перші n компонент вектора X , що відповідають бистротам вторинних частинок.

З виразу для відстань ρ_{ij} між точками максимуму функцій $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_i X)$ та $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_j X)$ видно, що відстань між точками максимуму цих функцій пропорційна відстані між відповідними перестановками

$$\sqrt{\sum_{l=1}^n \left(\pi_i^{-1}(l) - \pi_j^{-1}(l)\right)^2}. \text{ Тоді для кожного елемента } \pi \in S_n \text{ можна розглянути}$$

певний окіл цього елемента в множині S_n , задавши такий розмір цього околу, щоб сума усіх виразів $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$, що відповідають елементам цього околу, мала єдину точку максимуму. Це означає, що існує можливість розбити множину усіх перестановок S_n на підмножини таким чином, щоб сума усіх виразів $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$, що відповідають елементам кожної підмножини, матиме єдину точку максимуму. В результаті чого метод Лапласа може бути застосовано до розрахунку внесків в перерізи розсіяння з урахуванням суми інтерференційних внесків кожної такої підмножини, а не до кожного інтерференційного внеску окремо.

Розглянемо запропоновану ідею більш детально і для початку розглянемо приклад, який пояснює цю ідею на простому випадку в одновимірному просторі. Будемо вважати, що дві функції, кожна з яких має єдину точку максимуму, мають близькі точки максимуму, якщо сума цих двох функцій також має єдину точку максимуму. Розглянемо функцію $\phi_a(x) = \exp\left(-(x-a)^2\right)$, яка залежить від параметра a та має єдину точку максимуму $x=a$, та суму чотирьох таких функцій

$$g_a(x) = \phi_{-a}(x) + \phi_{-a/2}(x) + \phi_{a/2}(x) + \phi_a(x). \quad (2.41)$$

Кожний з доданків суми (2.41) має єдину точку максимуму $x = -a$, $x = -a/2$, $x = a/2$ і $x = a$ відповідно. Проте сума $g_a(x)$ цих функцій може мати більш однієї точки максимуму в залежності від значення параметру a , як це видно на рис. 2.8 - 2.9.

Оскільки кожен з доданків суми (2.41) при значенні параметра $a = 0$ приймає максимальне значення в точці $x = 0$, то й функція $g_0(x)$ приймає максимальне значення в точці $x = 0$. Відстань між сусідніми точками максимуму доданків суми (2.41) зростає з ростом значення параметра a . При $a = 0.5$ сума $g_{0.5}(x)$ ще має єдину точку максимуму в точці $x = 0$ (як це видно на рис. 2.8а), але з подальшим ростом значення параметра a до одиниці цей максимум плавно переходить в так зване «плато» (рис. 2.8б).

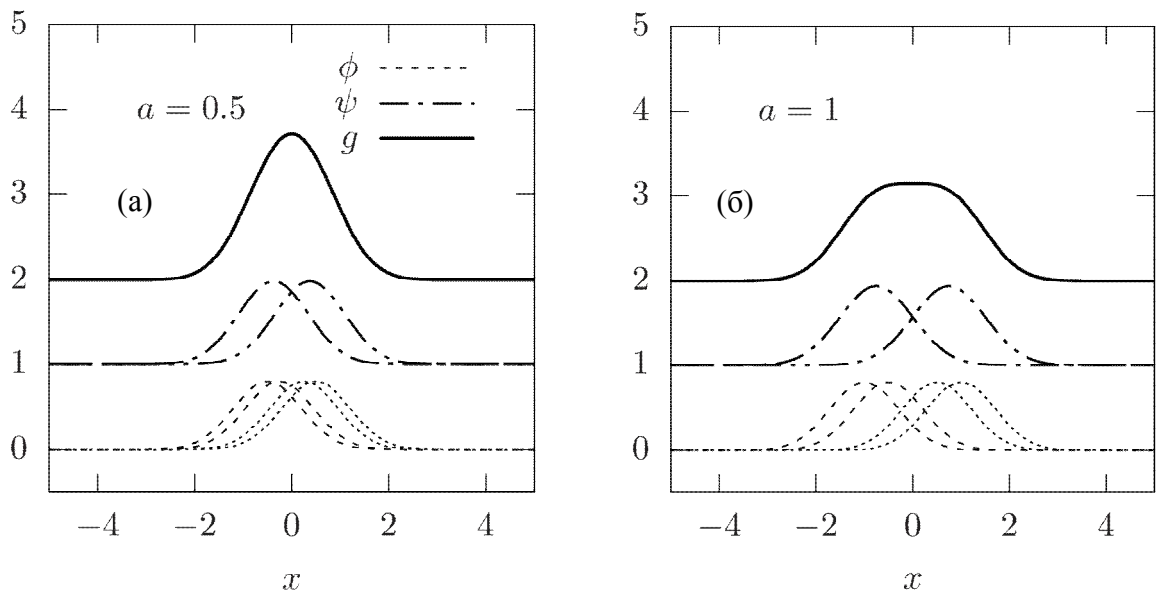


Рис.2.8. Графіки функцій $g_a(x)$ (суцільна лінія), доданків, що її складають $\phi_a(x)$ (штрихові лінії), та часткових сум $\psi_a^-(x)$ і $\psi_a^+(x)$ (штрих-пунктирні лінії) при різних значеннях параметра a . Графіки нормовано та вертикально зсунуто для запобігання перекриття.

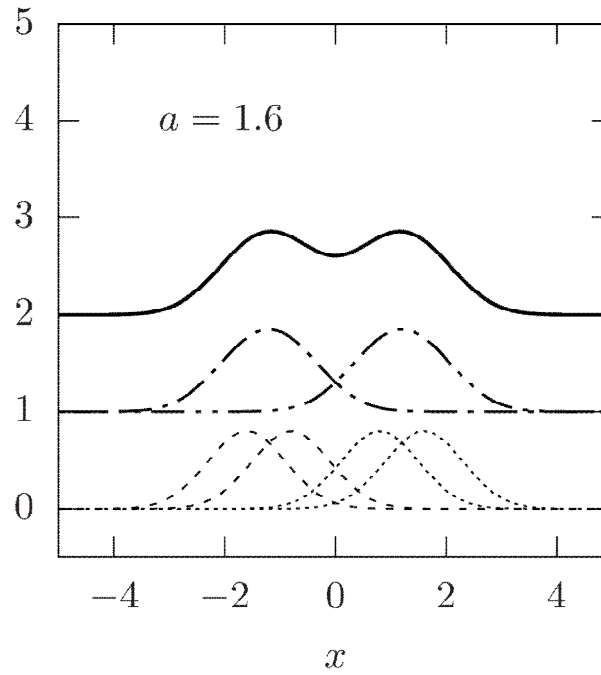


Рис. 2.9. Графіки функцій $g_a(x)$ та доданків $\phi_a(x)$ у випадку параметра a , коли функція $g_a(x)$ має декілька максимумів. Позначення як на на рис.2.8.

Подальше зростання значення параметра a призводить до того, що плато, що спостерігалось в околі точки $x = 0$, розщеплюється на два окремих максимуми, симетричних відносно початку координат (рис. 2.9). Але, в той же час, можна розглянути часткові суми $\psi_a^-(x) = \phi_{-a}(x) + \phi_{-a/2}(x)$ та $\psi_a^+(x) = \phi_{a/2}(x) + \phi_a(x)$, кожна з яких все ще продовжує приймає максимальне значення в єдиній точці і при значенні параметра $a = 1.6$, коли вся сума $g_{1.6}(x)$ має два максимуми.

Аналогічним чином ми можемо поступити при розгляді суми (2.34). При низьких енергіях, коли усі доданки цієї суми мають близькі точки максимуму, як ми вже казали, метод Лапласа може бути застосовувати до розрахунку одразу усіх інтерференційних внесків (2.40).

Втім з подальшим ростом енергії, коли функція $T_n(\sqrt{s}, X)$ набуває максимуми в декількох різних точках, ми можемо розглядати часткові суми доданків повної суми (2.34), які мають близькі точки максимуму. З цією метою

ми пропонуємо групувати сусідні вершини діаграми рис. 2.1 у k груп (не-порожніх множин), кожна з яких міститиме n_i вершин (рис. 2.10).

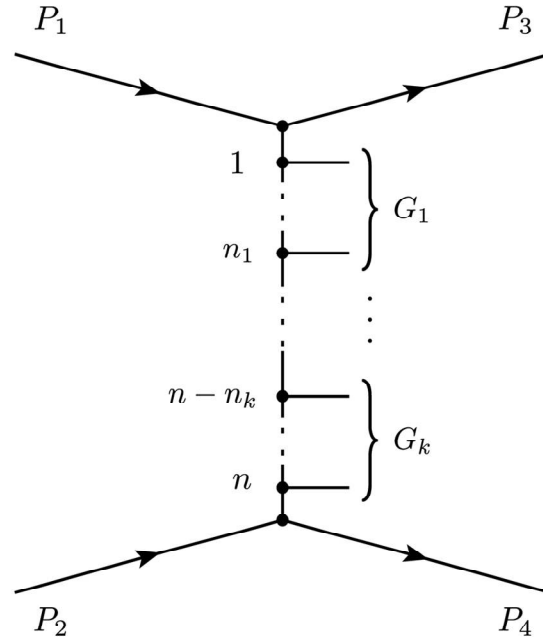


Рис. 2.10. Розбиття вершин діаграми на k груп. Кожна i -група вершин характеризується множиною G_i індексів вершин, що її складають.

Після цього розглянемо послідовність множин $G_1, G_2, \dots, G_n$, кожна з яких буде визначати індекси вершин відповідної групи

$$G_i = \left\{ v \in \mathbb{N}_n \mid \sum_{k=1}^{i-1} n_k \leq v \leq \sum_{k=1}^i n_k \right\}, \quad (2.42)$$

де $1 \leq i \leq k$, а n_i – кількість вершин у i -й групі.

Кожна перестановка $\pi \in S_n$ визначає певний порядок приєднання ліній вторинних частинок до вершин діаграми і таким чином розподіляє лінії вторинних частинок по групах $G_1, G_2, \dots, G_n$. Тому для кожної перестановки π розглянемо множини $\pi(G_1), \pi(G_2), \dots, \pi(G_n)$, де $\pi(G_i) = \{\pi(v) \mid v \in G_i\}$ – множина, що містить індекси вторинних частинок, що в діаграмі, яка визна-

часться перестановкою π , приєднуються до i -ої групи вершин. Це дозволяє нам ввести відношення еквівалентності $\sim$ на множині S_n наступним чином

$$\pi_i \sim \pi_j \Leftrightarrow \forall l = 1 \dots k, \pi_i(G_l) = \pi_j(G_l). \quad (2.43)$$

Це означає, що дві перестановки π_i та π_j є еквівалентними, якщо вони визначають такі діаграми, у яких лінії вторинних частинок приєднуються до вершин тих самих груп, але можливо відрізняються порядком приєднання в середині цих самих груп (0).

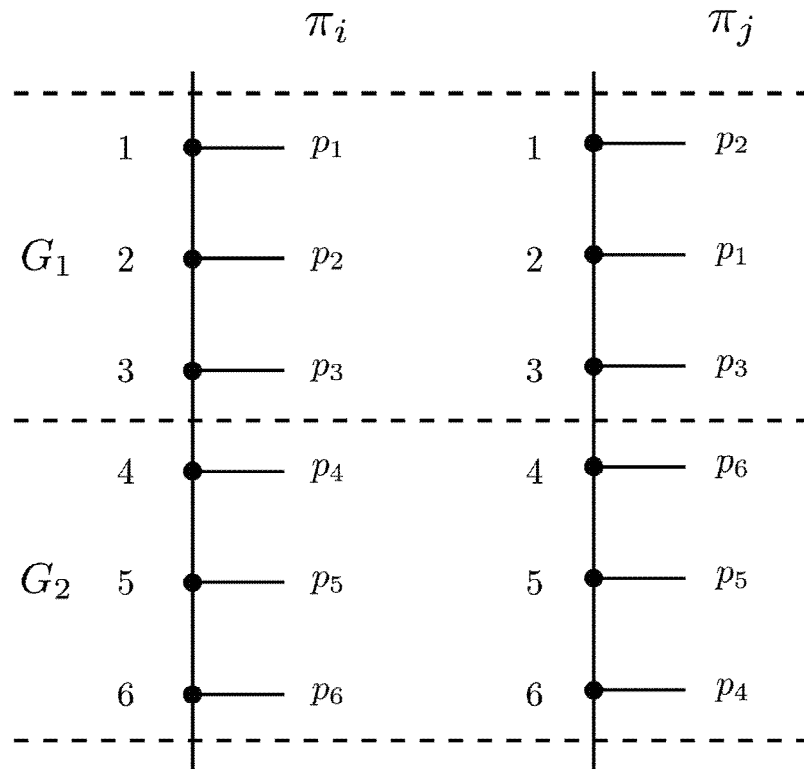


Рис. 2.11. Приклад двох еквівалентних перестановок π_i та π_j , при $n=6$, $k=2$ та $G_1 = \{1, 2, 3\}$, $G_2 = \{4, 5, 6\}$. Тут $\pi_i(G_1) = \pi_j(G_1) = \{1, 2, 3\}$ і $\pi_i(G_2) = \pi_j(G_2) = \{4, 5, 6\}$.

На рис. 2.11 $\pi_i(G_1) = \pi_j(G_1)$ і $\pi_i(G_2) = \pi_j(G_2)$, звідки випливає, що $\pi_i \sim \pi_j$. Введене таким чином співвідношення еквівалентності призводить до

розбиття множини S_n на класи еквівалентності $[\pi] = \{\pi_i \in S_n \mid \pi_i \sim \pi\}$.

Множину усіх класів еквівалентності (фактор-множину S_n за відношенням $\sim$) будемо позначати $S_n / \sim$. Кількість таких класів еквівалентності легко розрахувати, відповівши на питання, скількома способами можна розподілити n вторинних частинок між k групами, кожна з яких має відповідний розмір n_i , не враховуючи їх порядок всередині груп. Таким чином, отримаємо, що

кількість елементів у множині $S_n / \sim$ дорівнює $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

$$S_n = \bigcup_{[\pi] \in S_n / \sim} [\pi] \quad (2.44)$$

Враховуючи це, сума у виразі для амплітуди розсіяння (2.34) може бути представлена у вигляді

$$T_n(\sqrt{s}, X) = \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} \left[\sum_{\pi_i \in [\pi]} a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_i X) \right]. \quad (2.45)$$

2.2. Врахування інтерференції всередині груп та між групами

Розглянемо допоміжну функцію $A_n(\sqrt{s}, X)$

$$A_n(\sqrt{s}, X) = \sum_{e \in [\varepsilon]} a_n(\sqrt{s}, \hat{e}X), \quad (2.46)$$

де $[\varepsilon]$ – множина усіх перестановок $e \in S_n$, еквівалентних перестановці ε (одичному елементу групи перестановок).

Максимальна відстань між точками максимуму доданків у сумі (2.46) може бути значно меншою ніж у сумі (2.45), в залежності від кількості груп k та їх розмірів $n_1, \dots, n_k$. Це дозволяє обрати такі значення кількості груп вершин k і розміри груп $n_1, \dots, n_k$ в залежності від значень енергії $\sqrt{s}$ та кількості вторинних частинок n , що функція $A_n(\sqrt{s}, X)$ (2.46) матиме єдину точ-

ку максимуму (аналогічно як в попередньому прикладі кожна з часткових суми $\psi_a^-(x)$ та $\psi_a^+(x)$ мала єдину точку максимуму). Перепишемо вираз (2.45) в термінах $A_n(\sqrt{s}, X)$.

Можна легко показати, що для будь-якої перестановки $\pi_i \in [\pi]$, що належить деякому класу $[\pi]$, існує така перестановка $e \in [\varepsilon]$, що $\pi \circ e$. Таким чином, враховуючи (2.46) і (2.15), отримаємо

$$T_n(\sqrt{s}, X) = \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} \left[\sum_{e \in [\varepsilon]} a_n(\sqrt{s}, \hat{e}[\hat{\pi}X]) \right] = \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X), \quad (2.47)$$

де $\hat{\pi}$ – оператор, що відповідає представнику класу $[\pi]$.

Враховуючи (2.47), вираз для парціального перерізу непружного розсіювання (2.18) також можна переписати у термінах $A_n(\sqrt{s}, X)$

$$\begin{aligned} \sigma_n(\sqrt{s}) &= R(n, \sqrt{s}) \\ &\times \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i \sum_{[\pi_1] \in S_n / \sim} A_n^*(\sqrt{s}, \hat{\pi}_1 X) \sum_{[\pi_2] \in S_n / \sim} A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_2 X). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Одна із двох сум по множині $S_n / \sim$ у підінтегральному виразі (2.48) може бути легко врахована шляхом заміни змінних інтегрування, як це було зроблено у (2.19). Врахуємо таким чином, наприклад, суму $\sum_{[\pi_1] \in S_n / \sim}$. Для цього

го винесемо знак суми за інтеграл і у кожному доданку цієї суми зробимо заміну змінних інтегрування $X \rightarrow \hat{\pi}_1^{-1} X$. Якобіан такого перетворення дорівнює

єдиниці та міра інтегрування $\prod_{i=1}^{3n+2} dX_i$ залишається незмінною. При цьому

у підінтегральних виразах цієї суми матимемо

$$A_n^*(\sqrt{s}, X) \sum_{[\pi_2] \in S_n / \sim} A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_2 \hat{\pi}_1^{-1} X).$$

Можна легко довести, що якщо для будь-яких $\pi_i \in [\pi_1]$, $\pi_j \in [\pi_2]$ та $\pi_1 \not\sim \pi_2$ маємо $(\pi_i \circ \pi_j) \in [\pi_3]$. Тому з точністю до порядку доданків останній вираз можна переписати як $A_n^*(\sqrt{s}, X) \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X)$. Таким чином, враховуючи, що кількість доданків у сумі $\sum_{[\pi] \in S_n / \sim}$ дорівнює $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$, вираз (2.48) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_n(\sqrt{s}) &= R(n, \sqrt{s}) \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \\ &\times \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i A_n^*(\sqrt{s}, X) A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Звернімо увагу, що за визначенням функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ кожен доданок у сумі (2.49) має єдину точку максимуму. Це дозволяє застосовувати метод Лапласа для розрахунку доданків суми (2.49). При цьому кількість доданків у цій сумі може бути значно меншою ніж у сумі (2.20), якщо обрати $k \ll n$, що дає змогу проводити розрахунки для великої кількості вторинних частинок. Кожен доданок суми (2.49) також може бути представлений за допомогою відповідної розрізаної діаграми, аналогічно тому, як це було зроблено для (2.20), але з тією відміною, що діаграми, що відрізняються лише порядком приєднання ліній всередині груп вершин, вважаються еквівалентними (рис. 2.12).

Тепер, згідно з (2.49), для розрахунку усіх інтерференційних внесків у парціальні перерізи нам необхідно розрахувати внесок від кожного класу еквівалентності $[\pi]$, а не від кожної перестановки $\pi \in S_n$. Більш того, як буде показано далі, багато доданків у сумі (2.49) виявляються подібними та можуть бути враховані відповідними ваговими множниками. Для того, щоб продемонструвати наявність подібних доданків у сумі (2.49), розглянемо доданок, що відповідає деякому класу перестановок $[\pi_i]$

$$\int dX A_n^*(\sqrt{s}, X) A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_i X), \quad (2.50)$$

та зробимо заміну змінних інтегрування $X \rightarrow \hat{e}X$, де $\hat{e}$ – оператор, що відповідає деякій перестановці $e \in [\varepsilon]$.

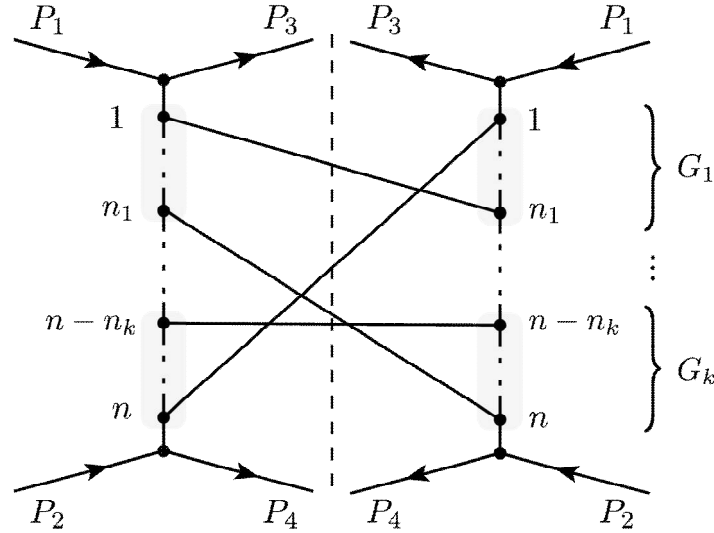


Рис. 2.12. Розрізана діаграма, в якій вершини обох частин діаграми згруповано у k груп.

Враховуючи, що функція $A_n(\sqrt{s}, X)$ за означенням симетрична відносно такої заміни $A_n(\sqrt{s}, \hat{e}X) = A_n(\sqrt{s}, X)$, отримаємо

$$\int dX A_n^*(\sqrt{s}, X) A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_i X) = \int d(\hat{e}X) A_n^*(\sqrt{s}, \hat{e}X) A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_i \hat{e}X). \quad (2.51)$$

Відповідно до визначення оператора перестановки, оператор $\hat{\pi}_i \hat{e}$ відповідає композиції перестановок $e \circ \pi_i$. Тоді можна показати, що до перестановки e та π_i можуть бути обрані такими, що π_i та $e \circ \pi_i$ належатимуть різним класам еквівалентності $[\pi_i]$ та $[\pi_j]$ відповідно. Таким чином, отримуємо, що

$$\int dX A_n^*(\sqrt{s}, X) A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_i X) = \int dX A_n^*(\sqrt{s}, X) A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_j X), \quad (2.52)$$

де $\pi_j = e \circ \pi_i$ та $[\pi_i] \neq [\pi_j]$.

Розглянемо, наприклад, випадок, коли $n = 6$ та $G_1 = \{1, 2, 3\}$, $G_2 = \{4, 5, 6\}$. Нехай $\pi_i = (4, 1, 5 \mid 3, 2, 6)$ і $e = (2, 3, 1 \mid 4, 6, 5)$, де вертикальною рисою для зручності відокремлено індекси першої та другої групи (мається на увазі, що зліва від риски розташовано елементи $\pi(G_1)$, а справа – елементи $\pi(G_2)$). Тоді композиція перестановок $\pi_j = e \circ \pi_i = (4, 2, 6 \mid 1, 3, 5)$, звідки видно, що

$$\pi_i(G_1) = \{4, 1, 5\} \neq \pi_j(G_1) = \{4, 2, 6\} \Rightarrow \pi_i \not\sim \pi_j, \quad (2.53)$$

а отже $[\pi_i] \neq [\pi_j]$. Разом з (2.52) це означає, що серед усіх класів еквівалентності знайдуться такі, що відповідають рівним доданкам у сумі (2.49).

Іншими словами, з визначення функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ випливає, що *обидві* частини розрізаної діаграми рис. 2.12 симетричні відносно зміни порядку з'єднання вершин лівої та правої частини діаграми всередині груп. Звідси слідує, що класи перестановок, яким відповідають такі діаграми виду рис. 2.12, що відрізняються лише порядком приєднання всередині груп, відповідають подібним доданкам суми (2.49). Щоб прояснити це твердження, розглянемо деяку розрізану діаграму виду рис. 2.1, яка характеризується деякою перестановкою π , і позначимо кількість з'єднань (рис. 2.13) між i -ою групою лівої частини діаграми і j -ою групою правої частини діаграми через m_{ij}

$$m_{ij} = |\pi(G_i) \cap G_j|, \quad (2.54)$$

де $|\cdot|$ означає потужність множини (в даному випадку кількість елементів).

Таким чином, кожен клас еквівалентності $[\pi]$ характеризується матрицею m розмірів $k \times k$, елементи якої визначаються виразом (2.54).

Якщо два будь-яких різні класи еквівалентності $[\pi_1]$ і $[\pi_2]$ характеризуються однією матрицею m , то їм відповідають еквівалентні діаграми виду

рис. 2.12, в тому сенсі, що вони визначають рівні доданки у сумі (2.49), бо одна з цих діаграм може бути отримана з іншої шляхом зміни порядку вершин лише всередині груп. Таким чином, необхідно розраховувати лише один з кожної множини подібних внесків, а останні враховувати ваговим множником.

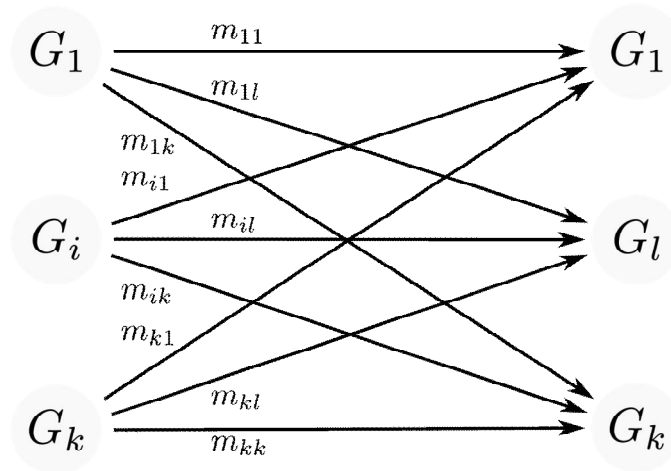


Рис. 2.13. Кількість з'єднань m_{ij} між групами вершин в розрізаний діаграмі.

Елементи матриці m_{ij} зображають кількість з'єднань між вершинами груп, які поєднані відповідною стрілкою.

Для того, щоб виділити усі унікальні (або виключити подібні) доданки у сумі (2.49), розглядатимемо множину M усіх можливих матриць розміру $k \times k$ таких, що сума елементів кожного i -го рядка (стовпця) кожної такої матриці дорівнює n_i – числу вершин у i -ій групі.

$$M = \left\{ m \in M_{k,k}(\mathbb{N}) \mid i = 1 \dots k, \sum_{j=1}^k m_{ij} = \sum_{j=1}^k m_{ji} = n_i \right\}. \quad (2.55)$$

Кожна матриця $m \in M$ дозволяє побудувати будь-яку перестановку π_m , що задовольняє умові (2.54), і таким чином представляє деякий доданок у сумі (2.49). Усі доданки, подібні до нього, можна врахувати ваговим множником W_m , що однозначно визначається компонентами матриці m . Для того, щоб отримати вираз для W_m , необхідно розрахувати кількість усіх можливих

діаграм виду рис. 2.12, які характеризуються однаковими матрицями m . Кількість таких класів дорівнює кількості усіх можливих способів, котрими з елементів множин $G_1, G_2, \dots, G_k$ можна згрупувати множини $G'_1, G'_2, \dots, G'_k$ так, що $|G_i \cap G'_j| = m_{ij}$, де $i, j = 1 \dots k$; тобто, щоб кожна множина G'_j містила рівно m_{ij} елементів із множини G_i . Таким чином, ваговий множник можна розрахувати наступним чином

$$W_m = \prod_{i=1}^k \frac{n_i!}{\prod_{j=1}^k (m_{ij})!}. \quad (2.56)$$

Наприклад, по матриці

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

може бути побудована перестановка $\pi_m = (1, 4, 5 | 2, 7, 8 | 3, 6, 9)$, а ваговий множник для внеску, що визначається такою перестановкою, дорівнює $W_m = 54$.

З урахуванням подібних внесків при врахуванні інтерференції між групами, вираз (2.49) остаточно приймає вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_n(\sqrt{s}) &= R(n, \sqrt{s}) \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \\ &\times \sum_{m \in M} W_m \int \prod_{i=1}^{3n+2} dX_i A_n^*(\sqrt{s}, X) A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}_m X), \end{aligned} \quad (2.58)$$

де $\hat{\pi}_m$ – оператор перестановки, що відповідає перестановці π_m , побудованій за матрицею m .

Вираз (2.58) значно відрізняється від виразу для парціальних перерізів (2.20), оскільки кількість доданків у (2.58) може бути значно зменшена порівняно з (2.20), в той час як кожен з підінтегральних виразів цих доданків все ще матиме єдину точку максимуму, що дозволяє застосовувати метод Лапласа до розрахунку інтегралів у сумі (2.58).

Врахування інтерференційних внесків у останньому виразі для парціальних перерізів непружного розсіяння враховуються у два етапи. Спершу враховується інтерференція, як ми кажемо, «всередині груп». Це означає, що враховуються усі можливі перестановки вторинних частинок у середині груп вершин. За врахування інтерференції всередині груп відповідає допоміжна функція $A_n(\sqrt{s}, X)$, що видно за її означенням – вона будується як сума функції $a_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X)$ по усім можливим перестановкам вторинних частинок всередині груп. Другим кроком враховується інтерференція «між групами». Іншими словами, враховуються усі можливі способи розподілу вторинних частинок по групах без врахування порядку в середині самих груп. Інтерференція між групами враховується шляхом побудови усіх можливих матриць (2.55).

Для застосування запропонованого метода врахування інтерференційних внесків залишилось описати процес максимізації функції $A_n(\sqrt{s}, X)$, а також значення в точці максимуму цієї функції та її матриці других похідних, необхідних для метода Лапласа. Перш за все відмітимо властивості точки максимуму функції $A_n(\sqrt{s}, X)$. Ми вже згадували особливості точки максимуму функції $a_n(\sqrt{s}, X)$ (рівняння (2.35)). Тому, оскільки кожен доданок суми $A_n(\sqrt{s}, X)$ зростає зі зменшенням поперечних компонент $(\mathbf{p}_\perp)_i \rightarrow 0$ і $\mathbf{p}_\perp^a \rightarrow 0$, то компоненти поперечних імпульсів у точці максимуму $\chi^{(0)}$ функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ повинні дорівнювати нулю, тобто $\chi_i^{(0)} = 0$ для $n < i \leq 3n + 2$. Крім того, як вже було зауважено, за визначенням функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ вона має бути симетричною відносно перестановок компонент X , що відповідають характеристикам вторинних частинок однієї групи, тобто

$A_n(\sqrt{s}, \hat{e}\chi^{(0)}) = A_n(\sqrt{s}, \chi^{(0)})$. Враховуючи, що функція $A_n(\sqrt{s}, X)$ має єдину точку максимуму, отримуємо, що

$$\hat{e}\chi^{(0)} = \chi^{(0)} \quad (2.59)$$

для будь-якої перестановки $e \in [\varepsilon]$. Тому при максимізації функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ необхідно розглядати лише її залежність від k параметрів $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}$, таких, що $\chi_{i \in G_j}^{(0)} = y_j^{(0)}$ для $i = 1 \dots n$. Крім того, властивість (2.59) дозволяє легко розрахувати значення функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ в точці максимуму (2.60) та її похідні в точці максимуму $\chi^{(0)}$.

$$A_n^0 = A_n(\sqrt{s}, \chi^{(0)}) = \sum_{e \in [\varepsilon]} a_n(\sqrt{s}, \hat{e}\chi^{(0)}) = \left(\prod_{i=1}^k n_i! \right) a_n(\sqrt{s}, \chi^{(0)}) \quad (2.60)$$

Розглянемо тепер перші n компонент вектора похідних $\partial A_n / \partial X_i$ в точці максимуму функції $A_n(\sqrt{s}, X)$, враховуючи властивість (2.59). Будемо позначати ці компоненти як $\partial A_n / \partial y_i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n}{\partial y_i}(\sqrt{s}, \chi^{(0)}) &= \sum_{e \in [\varepsilon]} \frac{\partial a_n}{\partial y_{e^{-1}(i)}}(\sqrt{s}, \hat{e}\chi^{(0)}) = \\ &= \frac{\prod_{j=1}^k n_j!}{n_{g(i)}} \sum_{j \in G_{g(i)}} \frac{\partial a_n}{\partial y_j}(\sqrt{s}, \chi^{(0)}), \end{aligned} \quad (2.61)$$

де $g(i)$ – індекс групи G , якій належить індекс i , тобто $i \in G_{g(i)}$.

Компоненти вектора похідних $\partial A_n / \partial (p_x)_i$ та $\partial A_n / \partial (p_y)_i$ розраховуються аналогічним чином як і (2.61). Для останніх двох компонент $\partial A_n / \partial P_x^a$ і $\partial A_n / \partial P_y^a$ маємо

$$\frac{\partial A_n}{\partial X_i}(\sqrt{s}, \chi^{(0)}) = \left(\prod_{j=1}^k n_j! \right) \frac{\partial a_n}{\partial X_i}(\sqrt{s}, \chi^{(0)}), \quad (2.62)$$

де $i = 3n + 1, 3n + 2$.

Матриця других похідних $\partial^2 A_n / \partial X_i \partial X_j$ в точці максимуму $\chi^{(0)}$ може бути розрахована шляхом розбиття на блоки по компонентам y , $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$. Кожен такий блок може бути розраховано окремо. Розглянемо для прикладу блок $\partial^2 A_n / \partial y_i \partial y_j$, який будемо позначати $D_{ij}^{(0)}$

$$D_{ij}^{(0)} = \sum_{e \in [\varepsilon]} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y_{e^{-1}(i)} \partial y_{e^{-1}(j)}}(\sqrt{s}, \hat{e}\chi^{(0)}). \quad (2.63)$$

Похідні $\sum_{e \in [\varepsilon]} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y_{e^{-1}(i)} \partial y_{e^{-1}(j)}}(\sqrt{s}, \hat{e}\chi^{(0)})$ будемо позначати $d_{ij}^{(0)}$.

Для врахування суми у (2.63) розглянемо три можливих випадки для індексів i та j :

1. $g(i) = g(j)$ та $i = j$

$$D_{ij}^{(0)} = \frac{\prod_{l=1}^k n_l!}{n_{g(i)}} \sum_{i_1 \in G_{g(i)}} d_{i_1 i_1}^{(0)} \quad (2.64)$$

2. $g(i) = g(j)$ та $i \neq j$

$$D_{ij}^{(0)} = \frac{\prod_{l=1}^k n_l!}{(n_{g(i)} - 1) n_{g(i)}} \sum_{\substack{i_1, i_2 \in G_{g(i)} \\ i_1 \neq i_2}} d_{i_1 i_2}^{(0)} \quad (2.65)$$

3. $g(i) \neq g(j)$

$$D_{ij}^{(0)} = \frac{\prod_{l=1}^k n_l!}{n_{g(i)} n_{g(j)}} \sum_{\substack{i_1 \in G_{g(i)} \\ i_2 \in G_{g(j)}}} d_{i_1 i_2}^{(0)} \quad (2.66)$$

Інші блоки $\partial^2 A_n / \partial(\mathbf{p}_x)_i \partial(\mathbf{p}_x)_j, \dots, \partial^2 A_n / \partial(\mathbf{p}_y)_i \partial(\mathbf{p}_y)_j$ розраховуються аналогічним чином. Зауважимо, що блоки $\partial^2 A_n / \partial y_i \partial(\mathbf{p}_x)_j, \partial^2 A_n / \partial y_i \partial(\mathbf{p}_y)_j$ та $\partial^2 A_n / \partial(\mathbf{p}_x)_j \partial(\mathbf{p}_y)_j$ дорівнюють нулю, оскільки усі похідні $\partial^2 a_n / \partial y_j \partial(\mathbf{p}_x)_j, \partial^2 a_n / \partial y_j \partial(\mathbf{p}_y)_j$ та $\partial^2 a_n / \partial(\mathbf{p}_x)_i \partial(\mathbf{p}_y)_j$ дорівнюють нулю (див. [10]).

Таким чином, ми маємо усі необхідні компоненти для застосування методу Лапласа для врахування інтерференційних внесків за формулою (2.58).

2.3. Модель інклюзивного перерізу вторинних частинок по бистротах і порівняння із експериментом.

Запропонований метод врахування інтерференційних внесків було застосовано в рамках моделі φ^3 для розрахунку залежності від енергії повних перерізів, а також інклюзивних перерізів по бистроті непружного розсіяння протонів. Моделі розрахованих залежностей представлено на рис. 2.14 – 2.16 (представлені залежності отримано при ефективній константі зв'язку $L = 29$, вираз для якої співпадає з відповідним виразом у [10, с. 876]).

Для розрахунку інклюзивних перерізів використовувався наступний вираз

$$\frac{\partial \sigma_{incl}}{\partial y}(\sqrt{s}, y) \propto \sum_{n=1}^{N(\sqrt{s})} \sum_{i=1}^n \int \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3n+2} dX_j \left| T_n(\sqrt{s}, X) \right|^2 \Big|_{X_i=y}, \quad (2.67)$$

де $N(\sqrt{s})$ – максимально можлива кількість вторинних частинок, що можуть утворитись в результаті непружного процесу при енергії $\sqrt{s}$.

Як видно з рис. 2.14 - 2.16, порівняння з експериментальними даними свідчить, що запропонований підхід, навіть в рамках простішої моделі, дозволяє отримати результати, що на якісному рівні описують експериментальні дані.

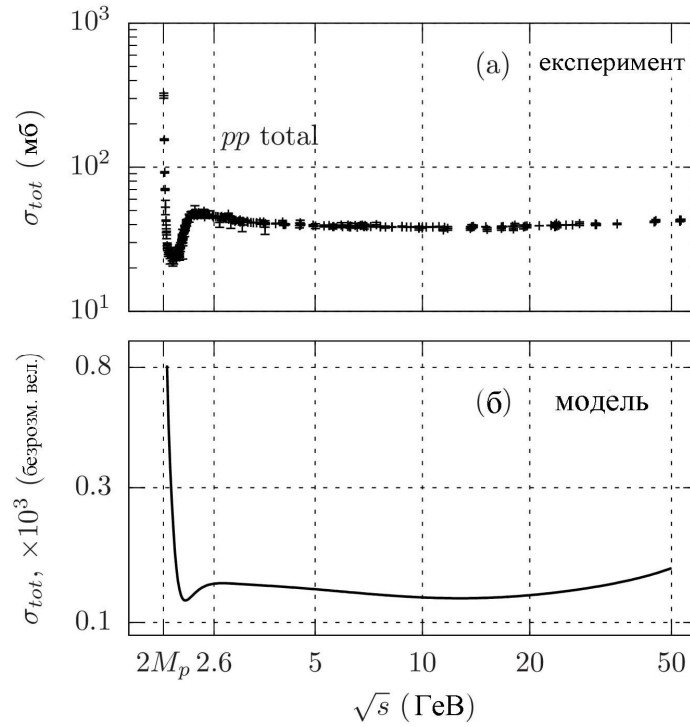


Рис. 2.14. Залежність повного перерізу протон-протонного розсіяння від енергії. Експериментальні дані [127] (а) та залежність, розрахована з використанням запропонованого метода з урахуванням усіх інтерференційних внесків для процесу з утворенням $n = 50$ вторинних частинок (б). M_p – маса протону.

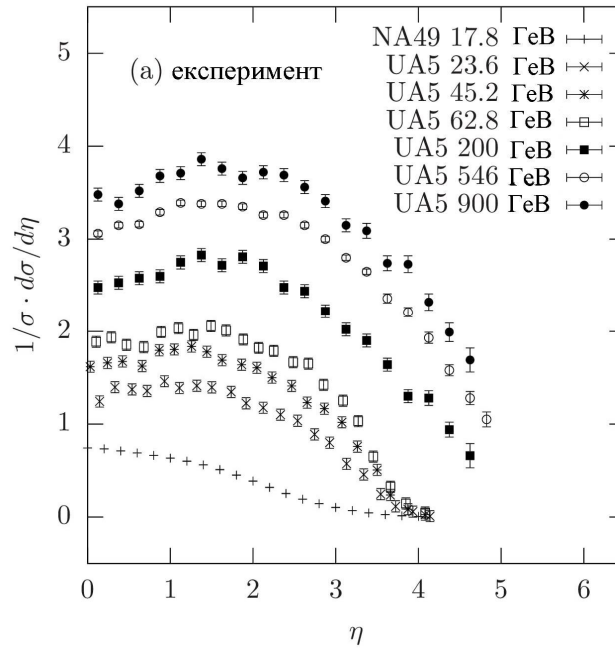


Рис. 2.15. Експериментальні залежності [72, 128] інклюзивного перерізу по бистротах від бистрот (псевдобистрот) у pp та $p\bar{p}$ розсіяннях при різних значеннях енергії у системі центру мас $\sqrt{s}$.

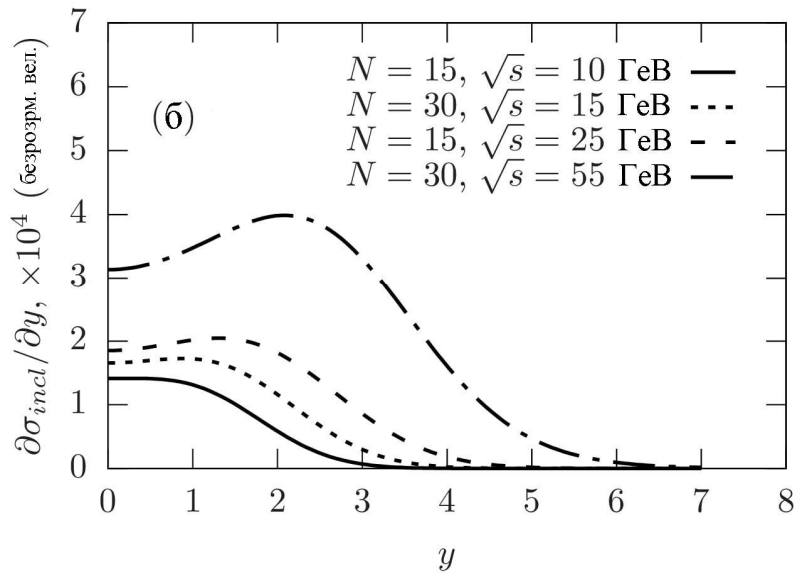


Рис. 2.16. Залежність інклюзивного перерізу по бистротах від бистрот (псевдобистрот) у pp та $p\bar{p}$ розсіяннях, розрахована з використанням запропонованого методу в рамках моделі φ^3 [87, 129, 130]. Тут N – максимальна кількість вторинних частинок у процесах, для яких враховано усі інтерференційні внески.

Особливий інтерес представляє поведінка залежності інклюзивного перерізу по бистроті (розподілу бистрот) від бистроти з ростом енергії (рис. 2.15).

Можна помітити, що при низьких енергіях дана залежність має єдину точку максимуму при нульових бистротах (псевдобистротах) (рис. 2.15, дані NA49 17,8 GeV). Проте, цей максимум стає менш чітким з ростом енергії $\sqrt{s}$. З подальшим ростом енергії цей максимум перетворюється на так зване «плато» (рис. 2.15, дані UA5 23,6, 45,2, 62,8 GeV). При ще більших енергіях це плато «розщеплюється» на два окремих максимуму, розташованих симетрично відносно нуля. Цей ефект можна пояснити, якщо розглянути поведінку точок максимуму функції $|T_n(\sqrt{s}, X)|^2$ з ростом енергії. При цьому, точки максимумів функції $|T_n(\sqrt{s}, X)|^2$ співпадають з точками максимуму функції

$T_n(\sqrt{s}, X)$, оскільки амплітуда розсіяння в рамках моделі φ^3 є дійсною функцією з точністю до постійного комплексного множника, яким при розгляді максимумів функції можна знехтувати.

Розглянемо вираз (2.16) при значеннях енергії $\sqrt{s}$, близьких до порогової енергії непружного процесу з утворенням однієї вторинної частинки $\sqrt{s} = (2M + m) + \varepsilon$, де $\varepsilon \geq 0$ – деяка додатна величина. При $\varepsilon \approx 0$, згідно з (2.36), бистроти вторинних частинок $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ у точці максимуму функції $a_n(\sqrt{s}, X)$ для будь-якого $n = 1, \dots, N(\sqrt{s})$ будуть близькими до нуля. Це означає, що усі доданки суми (2.16) матимуть близькі точки максимуму, а уся сума $T_n(\sqrt{s}, X)$ матиме єдину точку максимуму $\zeta^{(0)}$. Це також означає, що при розбитті вершин діаграми на групи однієї групи ($k=1$) достатньо для того, щоб функція $A_n(\sqrt{s}, X)$ (2.46), яка в цьому випадку співпадає з $T_n(\sqrt{s}, X)$, мала єдину точку максимуму. Враховуючи згадані особливості точки максимуму функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ (2.59), отримаємо, що $\zeta^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)$. Оскільки квадрат амплітуди розсіяння при низьких енергіях має єдину точку максимуму, то при нульових бистротах найбільш ймовірними серед непружних процесів будуть ті, в яких усі вторинні частинки будуть мати близькі до нуля бистроти. Іншими словами, математичне очікування вектора бистрот вторинних частинок при низьких енергіях дорівнює нулю (нуль-вектору). В результаті чого при низьких енергіях залежність інклюзивного перерізу по бистротах (розподілу бистрот) від бистрот має єдиний чіткий максимум у нулі.

Подальше зростання енергії (неперервне збільшення параметра ε у виразі $\sqrt{s} = (2M + m) + \varepsilon$) призводить до того, що згідно з (2.36), зростає різниця арифметичної прогресії бистрот у точці максимуму функції $a_n(\sqrt{s}, X)$. Як наслідок, зростають відстані між точками максимуму доданків у виразі

суми (2.16) для $T_n(\sqrt{s}, X)$. Легко показати, що точки максимуму цих доданків лежать на $n-1$ вимірній сфері, радіус якої зростає з ростом енергії. В результаті цього єдиний максимум функції $T_n(\sqrt{s}, X)$, що спостерігався при низьких енергіях, стає *менш чітким*, тобто власні значення λ_i матриці других похідних від функції T_n в точці $\zeta^{(0)}$ зменшуються за модулем та все ще приймають від'ємні значення. Це означає, що дисперсії компонент вектора бистрот зростають з ростом енергії, в той час як компоненти математичного очікування вектора бистрот дорівнюють нулю (про це більш детально у наступному розділі). Відповідно, єдина точка максимуму у залежності інклюзивного перерізу по бистротах від бистрот стає менш чіткою та з ростом енергії переходить у плато.

Подальше зростання енергії $\sqrt{s}$ призводить до того, що точки максимумів доданків у сумі $T_n(\sqrt{s}, X)$ віддаляються одна від одної настільки, що єдиний максимум, що спостерігався при низьких енергіях, розщеплюється на декілька окремих максимумів. При цьому власні значення λ_i матриці других похідних функції $T_n(\sqrt{s}, X)$ у точці $\zeta^{(0)}$ стають додатними, а перші похідні все ж залишаються рівними нулю, що свідчить про наявність локального мінімуму функції $T_n(\sqrt{s}, X)$ у точці $\zeta^{(0)}$. При цьому функція $T_n(\sqrt{s}, X)$ має локальні максимуми, віддалені від нуля. Це означає, що з ростом енергії процеси, у яких вторинні частинки утворюються з ненульовими бистротами, стають більш ймовірними, ніж процеси, у яких всі вторинні частинки у кінцевому стані мають нульові бистроти.

Таким чином, максимум у залежності інклюзивного перерізу по бистротах від бистрот зсувається від нуля. Крім того, максимуми функції $T_n(\sqrt{s}, X)$ розташовані симетрично відносно нуля, оскільки розглядувана система є симетричною відносно інверсії осі зіткнення первинних частинок ($y \rightarrow -y$). В

результаті максимуми в залежності інклюзивного перерізу по бистротах від бистрот при високих енергіях розташовані симетрично відносно нуля, що узгоджується з експериментальними даними.

2.4. Висновки до розділу 2

Результати, представлені у цьому розділу, переконливо доводять необхідність врахування інтерференційних внесків у перерізи непружних процесів розсіювання. Окрім значного внеску у парціальні перерізи розсіювання, врахування інтерференційних внесків дозволяє пояснити механізм утворення максимумів у розподілі бистрот в непружному процесі саме, як інтерференційний ефект.

Таким чином, інтерференційні внески обов'язково повинні бути враховані у Монте-Карло генераторі процесів розсіювання. Запропонований у цьому розділі метод врахування інтерференційних внесків у перерізи непружних процесів дозволяє враховувати інтерференційні внески для процесів з утворенням відносно великої кількості вторинних частинок. Зокрема, цей метод було застосовано для розрахунку моделей залежностей повного перерізу розсіювання від енергії та інклюзивних перерізів по бистротах від бистрот для процесів з утворенням до 50 вторинних частинок у діапазоні від порогової енергії непружного розсіювання до 72 ГеВ.

Незважаючи на той факт, що для розробки та перевірки метода було обрано найпростішу модель φ^3 з дійсним скалярним полем, отримані результати на якісному рівні описують експериментальні дані. Крім того, запропонований підхід дозволяє проаналізувати поведінку форми залежностей розподілу бистрот у непружних процесах при різних енергіях, та запропонувати фізичне пояснення цього ефекту. Все це свідчить про те, що запропонований метод доцільно застосувати в рамках більш реалістичної моделі, наприклад, в рамках моделі багаточастинкових полів, заснованої на КХД [11, 106, 123, 124]. Зокрема, у роботах [126, 131] розглядається розрахунок пружних дифе-

ренційних перерізів з умови унітарності, проте без інтерференційних внесків, які можна врахувати запропонованим методом.

Ідеї метода врахування інтерференційних внесків, що описані в цьому розділі, є підґрунтям для створення нового підходу до побудови Монте-Карло генераторів процесів розсіяння.

РОЗДІЛ 3.

МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ПОБУДОВИ МОНТЕ-КАРЛО ГЕНЕРАТОРІВ І ВРАХУВАННЯ ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНИХ ЕФЕКТІВ

Метод Лапласа разом із запропонованим методом врахування інтерференційних внесків дає можливість не тільки розраховувати перерізи розсіяння, але й побудувати Монте-Карло генератор непружних процесів розсіяння [132, 133]. В даному контексті Монте-Карло генератор представляє собою алгоритм, вхідними даними якого є чотири-імпульси розсіюваних частинок у початковому стані P_1 та P_2 , а вихідними даними є чотириімпульси первинних частинок P_3 , P_4 та набір з n чотириімпульсів вторинних частинок $p_1, \dots, p_n$ у кінцевому стані. При цьому кількість вторинних частинок n , а також значення компонент чотириімпульсів у кінцевому стані генеруються за допомогою генератора псевдовипадкових чисел таким чином, щоб задовольнялись наступні умови.

1. Має задовольнятись закон збереження енергії-імпульсу

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + \sum_{i=1}^n p_i. \quad (3.1)$$

2. Статистика подій, отримана по результатах багатьох запусків алгоритму з однаковими вхідними даними, має узгоджуватись з відповідними експериментальними даними (одним із прикладів таких даних можна розглянути розподіл бистрот у непружних процесах, або, іншими словами, залежність інклюзивного перерізу по бистроті від бистрот).

З другої умови зрозуміло, що алгоритм для генерування подій розсіяння має базуватись на динамічній моделі, що містить інформацію про фізику взаємодії частинок, для яких генеруються ці події. Для розробки та опису підходу до побудови такого алгоритму також візьмемо, як й у попередньому розділі, модель φ^3 . Такий вибір аргументовано тим, що, як свідчать результати

попереднього розділу, розрахунки спостережуваних величин в рамках цієї моделі дають результати, які якісно узгоджуються з експериментальними даними. Крім того, алгоритм, розроблений на базі такої моделі може бути модифіковано для подальшого застосування в рамках іншої більш реалістичної фізичної моделі багаточастинкових полів [106, 123, 124, 134 - 136], розрахунки в рамках якої зводяться до розрахунків у φ^3 (див. [124]).

У пропонованому підході генерування подій відбувається у два етапи. На першому етапі генерується кількість вторинних частинок n , тобто кількість чотириімпульсів вторинних частинок, що будуть спостерігатись в кінцевому стані у даній події. На другому етапі генеруються власне компоненти усіх n чотириімпульсів вторинних частинок у кінцевому стані (рис. 3.1).

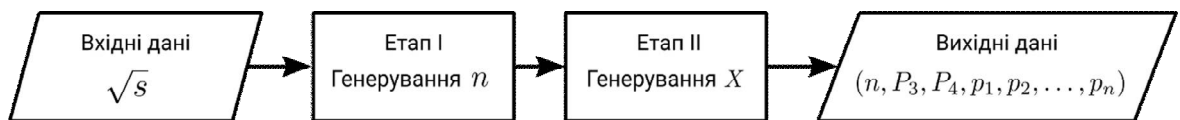


Рис. 3.1. Спрощене схематичне зображення алгоритму генерування подій.

Оскільки події з утворенням різної кількості вторинних частинок n_1 та n_2 , $n_1 \neq n_2$ є взаємно виключними подіями, то

$$\sum_{n=0}^{N(\sqrt{s})} P(n) = 1, \quad (3.2)$$

де $N(\sqrt{s})$, як і раніше, – максимальна кількість вторинних частинок, що може утворитись у непружному процесі при певній енергії первинних частинок $\sqrt{s}$. Тут $P(n)$ – ймовірність утворення n вторинних частинок з будь-якими чотириімпульсами. Цілком очевидно, що ця ймовірність пропорційна парціа-

льному перерізу розсіяння утворення n вторинних частинок при енергії $\sqrt{s}$, тобто $P(n) \sim \sigma_n(\sqrt{s})$.

Враховуючи умову (3.2), запишемо

$$P(n) = \frac{\sigma_n(\sqrt{s})}{\sum_{i=0}^{N(\sqrt{s})} \sigma_i(\sqrt{s})}, \quad (3.3)$$

де $n = 0, \dots, N(\sqrt{s})$.

Як видно з останнього виразу, перший етап – генерування кількості вторинних частинок, не представляє труднощів за умови, що парціальні перерізи можуть бути розраховані в рамках моделі, що використовується для генерування подій. Втім, вже на цьому етапі постає задача врахування інтерференційних внесків у перерізи розсіяння, оскільки, як видно з результатів попереднього розділу, саме інтерференційні внески можуть відповідати за певні спостережувані ефекти. Тому на цьому етапі при розрахунках парціальних перерізів ми застосовуємо метод, описаний у попередньому розділі та у роботах [9, 87, 129, 137]. Зауважимо, що розрахунок парціальних перерізів в залежності від енергії $\sqrt{s}$ та кількості вторинних частинок n може займати значну кількість часу. Через це парціальні перерізи доречно розраховувати лише під час першої генерації подій для фіксованого значення енергії $\sqrt{s}$ та зберігати розраховані значення для подальших генерацій подій. При цьому значення $N(\sqrt{s})$ при високих енергіях може значно перевищувати кількість вторинних частинок $N_{\max}$, для якої парціальні перерізи можуть бути розраховані запропонованим методом з урахуванням усіх інтерференційних внесків. Це обмеження призводить до того, що у сумі (3.3) відкидаються доданки, що відповідають умові $i > N_{\max}$

$$P(n) = \frac{\sigma_n(\sqrt{s})}{\sum_{i=0}^{N_{\max}} \sigma_i(\sqrt{s})}. \quad (3.4)$$

Проте це обмеження та перехід від (3.3) до (3.4) можна також розглянути з іншого боку. У роботі [10] представлено залежності парціальних перерізів від енергії для різних значень n . З цих залежностей видно, що при фіксованій енергії парціальні перерізи для малих n та для $n \rightarrow N(\sqrt{s})$ значно менші за значення σ_{N_1} , де $N_1 \ll N(\sqrt{s})$. Тому події з утворенням кількості вторинних частинок n , близькі до $N(\sqrt{s})$, будуть мати ймовірності близькі до нуля і ними можна знехтувати. Таким чином, перший етап алгоритму полягає у генеруванні дискретної випадкової величини з розподілом ймовірності (3.4). Зауважимо, що ймовірності (3.4) для різних n можуть відрізнятися на порядки, що необхідно взяти до уваги при обранні конкретного алгоритму генерування дискретної випадкової величини з заданим розподілом.

На другому етапі генеруються власне компоненти чотириімпульсів вторинних частинок у кінцевому стані. Як було показано в попередньому розділі, усі чотириімпульси частинок у кінцевому стані однозначно визначаються величиною $\sqrt{s}$, а також $3n+2$ величинами $y_1, \dots, y_n$, $(\mathbf{p}_1)_x, \dots, (\mathbf{p}_n)_x$, $(\mathbf{p}_1)_y, \dots, (\mathbf{p}_n)_y$, P_x^a, P_y^a . Таким чином, розподіл ймовірностей кожного набору значень цих величин задається квадратом модуля амплітуди розсіяння непружного процесу з утворенням n вторинних частинок $\left| T_n(\sqrt{s}, X) \right|^2$.

Цей етап є значно складнішим у порівнянні з першим, оскільки, тут необхідно згенерувати багатовимірну неперервну випадкову величину з урахуванням складної функції розподілу. Як було показано в попередньому розділі, при великих значеннях n , навіть у випадку, коли розгляд діаграм непружного розсіяння обмежується безпетльовими діаграмами типу гребінка, функція $\left| T_n(\sqrt{s}, X) \right|^2$ є дуже складною. При цьому суттєву роль відіграють особливості поведінки точок максимуму цієї функції в залежності від кількості вто-

ринних частинок n та енергії $\sqrt{s}$. Тому далі розглянемо окремо випадки, коли функція $\left|T_n(\sqrt{s}, X)\right|$ має єдину та декілька окремих точок максимуму

3.1. Метод Лапласа для генерації подій у випадку амплітуди розсіяння з однією точкою максимуму

Нехай на першому етапі при генеруванні кількості вторинних частинок було згенеровано таке значення n , що при заданому на початку генерування значенні енергії $\sqrt{s}$ квадрат модуля амплітуди розсіяння непружного процесу $\left|T_n(\sqrt{s}, X)\right|$ має єдину точку максимуму $X^{(0)}$. З попереднього розділу (вирази (2.35) - (2.36)) видно, що амплітуда розсіяння в рамках розглядуваної моделі дійсно може мати одну єдину точку максимуму при енергії $\sqrt{s}$, близькій до порогової енергії непружного процесу з утворенням n вторинних частинок.

Тоді розглянемо $3n + 2$ вимірну випадкову величину $X \in \mathbb{R}^{3n+2}$ з диференційною функцією розподілу

$$f(X_1, \dots, X_{3n+2}) \propto \left|T_n(\sqrt{s}, X)\right|^2. \quad (3.5)$$

Тут, як й у попередньому розділі, для зручності будемо скорочено позначати $f(X)$ залежність від усіх $3n + 2$ змінних $f(X_1, \dots, X_{3n+2})$. Представимо цю функцію у наступному вигляді:

$$f(X) = \exp[\ln f(X)]. \quad (3.6)$$

Оскільки функція $f(X)$ має єдину точку максимуму $X^{(0)}$, можемо розкласти показник експоненти у виразі (3.6) в ряд Тейлора до другого порядку в околі точки $X^{(0)}$. Враховуючи, що в точці максимуму перші похідні функції $\ln f(X)$ дорівнюють нулю, отримаємо

$$f(X) = f_0 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} \frac{\partial^2 \ln f}{\partial X_i \partial X_j} (X^{(0)}) \left(X - X^{(0)} \right)_i \left(X - X^{(0)} \right)_j \right], \quad (3.7)$$

де $f_0 = f(X^{(0)})$ – значення функції розподілу в точці максимуму.

Позначимо через D матрицю других похідних від $\ln f(X)$ у точці $X^{(0)}$

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 \ln f}{\partial X_i \partial X_j} (X^{(0)}). \quad (3.8)$$

Оскільки матриця D є симетричною, то існує таке ортогональне перетворення $X \rightarrow Z = VX$, що робить матрицю $D' = VDV^{-1}$ діагональною. Тут для скорочення $Z = VX$ означає вектор з компонентами $Z_i = \sum_{j=1}^{3n+2} V_{ij} X_j$. Стовпці матриці такого перетворення V є насправді власними векторами матриці D , що дозволяє для кожної матриці D знайти таке перетворення за допомогою чисельних алгоритмів знаходження власних значень та власних векторів симетричних матриць (див. наприклад алгоритм Якобі для діагоналізації симетричних матриць [138]). При цьому можна показати, що в цьому випадку матриця V є ортогональною, тобто $V^{-1} = V^T$. Іншими словами, завжди можливо обрати такий базис, що матриця других похідних (3.8) у виразі (3.7) може бути представлена у вигляді

$$D'_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad (3.9)$$

де λ_i , $i = 1 \dots n$ є власними значеннями матриці D . Скористаємось цим та розглянемо нову багатовимірну випадкову величину $Z = (Z_1, \dots, Z_{3n+2})$, яку визначимо наступним чином

$$Z_i = \sum_{j=1}^{3n+2} V_{ij} X_j, \quad (3.10)$$

де V_{ij} – компоненти матриці перетворення, що робить матрицю $D' = VDV^T$ діагональною. Вираз для диференційної функції розподілу $\phi(Z)$ величини Z можна отримати з виразу функції розподілу X та перетворення (3.10)

$$\phi(Z) = f\left(X = V^{-1}Z\right) \left| \frac{\partial(X_1, X_2, \dots, X_{3n+2})}{\partial(Z_1, Z_2, \dots, Z_{3n+2})} \right|. \quad (3.11)$$

Враховуючи, що матриця V є ортогональною, отримаємо

$$\phi(Z) = f\left(V^{-1}Z\right) |\det V^{-1}| = f\left(V^T Z\right). \quad (3.12)$$

В результаті з урахуванням (3.7) вираз (3.12) для функції розподілу випадкової величини Z має вигляд

$$\phi(Z) = f\left(V^T Z\right) = f_0 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} D_{ij} \left(V^T Z - X^{(0)} \right)_i \left(V^T Z - X^{(0)} \right)_j \right]. \quad (3.13)$$

Оскільки $V^T V = E$, де E – одинична матриця, то представимо доданки $X^{(0)}$ у дужках у виразі (3.13) як $V^T V X^{(0)}$, отримаємо

$$\phi(Z) = f_0 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} D_{ij} \left(V^T Z - V^T V X^{(0)} \right)_i \left(V^T Z - V^T V X^{(0)} \right)_j \right]. \quad (3.14)$$

Винесемо у останньому виразі V^T за дужки та отримаємо

$$\phi(Z) = f_0 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} \sum_{i_1=1}^{3n+2} \sum_{j_1=1}^{3n+2} D_{ij} V_{ii_1}^T V_{jj_1}^T \left(Z - V X^{(0)} \right)_{i_1} \left(Z - V X^{(0)} \right)_{j_1} \right]. \quad (3.15)$$

Перепишемо добуток $D_{ij} V_{ii_1}^T V_{jj_1}^T$ у такому порядку $V_{ii_1}^T D_{ij} V_{jj_1}^T = V_{i_1 i} D_{ij} V_{j j_1}^T$ та врахуємо, що матриця перетворення V може бути обрана такою, що сума

$\sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} V_{ij} D_{ij} V_{jj}^T$ буде визначати компоненти діагональної матриці (3.9).

Для цього, вираз (3.15) перепишемо наступним чином

$$\phi(Z) = f_0 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} \left(\sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} V_{ij} D_{ij} V_{jj}^T \right) \left(Z - VX^{(0)} \right)_{i_1} \left(Z - VX^{(0)} \right)_{j_1} \right]. \quad (3.16)$$

З урахуванням (3.9) вираз (3.16) приймає вигляд

$$\phi(Z) = f_0 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n+2} \sum_{j=1}^{3n+2} \lambda_i \delta_{ij} \left(Z - VX^{(0)} \right)_i \left(Z - VX^{(0)} \right)_j \right]. \quad (3.17)$$

Остаточно, врахувавши одну із сум з дельта-символом у (3.17), отримаємо

$$\phi(Z) = f_0 \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n+2} \lambda_i \left(Z - Z^{(0)} \right)_i^2 \right], \quad (3.18)$$

де λ_i – власні значення матриці D , а $Z^{(0)} = VX^{(0)}$.

Доцільність розглянутого перетворення $X \rightarrow Z = VX$ полягає у тому, що в результаті функція розподілу величини Z факторизується на $3n+2$ функцій, кожна з яких є функцією розподілу окремої одновимірної випадкової величини. Дійсно, перепишемо вираз (3.18) у наступному вигляді

$$\phi(Z) = f_0 \prod_{i=1}^{3n+2} \exp \left[\frac{1}{2} \lambda_i \left(Z - Z^{(0)} \right)_i^2 \right] = \prod_{i=1}^{3n+2} \phi_i(Z_i). \quad (3.19)$$

Таким чином, як видно з (3.19), функція $3n+2$ змінних $\phi(Z)$, шляхом певного вибору перетворення V , може бути представлена у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить лише від однієї компоненти змінної Z_i . Це означає, що компоненти багатовимірної випадкової величини Z насправді є незалежними випадковими величинами, кожна з яких має свою функцію розподілу

$$\phi_i(Z_i) \propto \exp\left[\frac{1}{2}\lambda_i\left(Z_i - Z_i^{(0)}\right)^2\right]. \quad (3.20)$$

Зауважимо, що власні значення λ_i матриці других похідних функції $f(X)$ в точці максимуму $X^{(0)}$ приймають від'ємні значення, що дозволяє представити їх у вигляді $\lambda_i = -1/\tilde{\sigma}_i^2$ (не плутати з позначеннями для парціальних перерізів σ_n).

Тоді перепишемо вираз (3.20) у вигляді

$$\phi_i(Z_i) = \phi_i^0 \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(Z_i - \mu_i)^2}{\tilde{\sigma}_i^2}\right], \quad (3.21)$$

де $\mu_i = Z_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{3n+2} V_{ij} X_j^{(0)}$ та $\tilde{\sigma}_i = 1/\sqrt{-\lambda_i}$ – параметри розподілу випадкової величини Z_i , ϕ_i^0 – деякий нормувальний множник.

Ці параметри однозначно визначаються компонентами точки максимуму $X^{(0)}$ функції $f(X)$ та власними значеннями λ_i матриці других похідних цієї функції в точці максимуму. З виразу (3.21) видно, що $Z_1, Z_2, \dots, Z_{3n+2}$ є незалежними одновимірними випадковими гаусівськими величинами, тобто при генеруванні багатовимірної випадкової величини Z кожна з її компонент Z_i може бути легко згенерована незалежно від інших. Це значно полегшує процес генерування багатовимірної випадкової величини X , оскільки компоненти цієї величини X_i однозначно визначаються усіма компонентами величини Z шляхом оберненого перетворення

$$X_i = \sum_{j=1}^{3n+2} V_{ij}^T Z_j. \quad (3.22)$$

При цьому необхідно піклуватись про те, щоб згенеровані таким чином змінні X належали фізичній області, тобто були такими, що задовольняють умові закону збереження енергії-імпульса. У протилежному випадку згене-

ровані величини відкидаються та другий етап генерування повторюється. Зауважимо, що точки фазового простору, що мають великі значення компонент X_i і тому не задовольняють умові збереження енергії-імпульса, знаходяться достатньо далеко від точки максимуму амплітуди розсіяння. Значення ряду Тейлора квадрата модуля амплітуди розсіяння (3.7), що використовується для апроксимації функції розподілу, в цих точках приймає значення значно менші ніж у околі точки максимуму. Саме тому такі випадки, коли згенеровані величини X_i не задовольняють необхідним умовам, відбуваються з малою ймовірністю.

Розглянемо для демонстрації застосування запропонованого алгоритму на простому прикладі двовимірної випадкової величини, функція розподілу якої має єдину точку максимуму. Нехай функція розподілу цієї величини має вигляд

$$f(x, y) = \alpha \frac{1}{k + ax^2 + by^2 + xy}, \quad (3.23)$$

де α – нормуючий множник, k, a, b – деякі параметри, значення яких оберемо далі такими, щоб функція $f(x, y)$ мала єдину точку максимуму у точці $(0, 0)$. Застосуємо описаний у цьому розділі алгоритм для двовимірної випадкової величини з функцією розподілу (3.23). При цьому будемо вимагати, щоб задовольнялась умова

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

аналогічно тому, як компоненти величини X повинні задовольняти умові збереження енергії-імпульса.

Перш за все розрахуємо значення матриці других похідних від логарифма функції (3.23) у точці максимуму без врахування нормуючого множника.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 \ln f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2a}{k} & -\frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & -\frac{2b}{k} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Після чого чисельно розраховуємо власні значення матриці (3.25). Для параметрів $k=10$, $a=0.1$, $b=0.1$ отримаємо наступні власні значення та власні вектори матриці

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3 \times 10^{-2}, \quad \lambda_2 = -5 \times 10^{-2} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

що дозволяє побудувати матрицю такого перетворення V , що зробить матрицю $D' = VDV^{-1}$ діагональною. Нагадаємо, що стовпці матриці V є власними векторами матриці D , тому

$$V = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Згідно з запропонованим алгоритмом будемо далі генерувати незалежні гаусівські випадкові величини z_1 та z_2 з параметрами розподілу

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \quad \mu_2 = 0 \\ \tilde{\sigma}_1 &= 1 / \sqrt{-\lambda_1} = 1 / \sqrt{3 \times 10^{-2}} = 5.77 \\ \tilde{\sigma}_2 &= 1 / \sqrt{-\lambda_2} = 1 / \sqrt{5 \times 10^{-2}} = 4.47. \end{aligned} \quad (3.28)$$

За кожною парою згенерованих величин (z_1, z_2) будемо за оберненим перетворенням V^T отримувати значення випадкової величини $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ -0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, перевіряючи при цьому, чи задовольняється умова (3.24). Якщо на певному етапі отримана пара значень (x, y) не задовольняє

умові (3.24), відкидаємо ці значення та знову генеруємо пару незалежних величин (z_1, z_2) .

У розглянутому прикладі функція розподілу $f(x, y)$ добре апроксимується в усій розглянутій області (3.24). В результаті чого гістограма двовимірної випадкової величини (x, y) , згенерованої за допомогою описаного алгоритму, узгоджується з теоретичною функцією розподілу (3.23) (рис. 3.2).

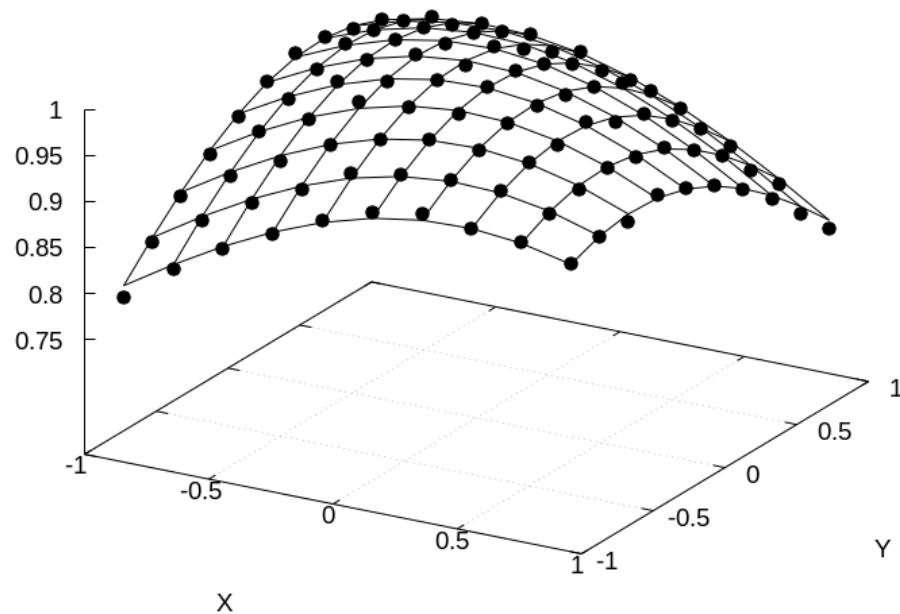


Рис. 3.2. Функція розподілу $f(x, y)$ при значеннях параметрів $k = 10$, $a = 0.1$, $b = 0.1$ та значення бінів гістограми згенерованої величини (x, y) за результатами 10^7 згенерованих пар. Для кращого візуального сприйняття значення бінів гістограми позначено чорними точками.

Простота описаного алгоритму, яка впливає з розглянутого приклада двовимірної випадкової величини, зберігається і при генеруванні величини, розмірність якої досягає навіть 150-ти, коли кількість вторинних частинок, для яких необхідно генерувати динамічні характеристики, може становити порядку п'ятидесяти. При цьому необхідною умовою є те, що функція розпо-

ділу має мати єдину точку максимуму та добре апроксимуватись в околі цієї точки її розкладом у ряд Тейлора до другого порядку.

Далі у цьому розділі будуть представлені результати застосування запропонованого алгоритму при моделюванні залежності інклюзивного перерізу по швидкості при низьких енергіях, коли, як було описано у попередньому розділі, квадрат модуля амплітуди розсіяння має єдину точку максимуму в нулі. У цьому випадку описаний алгоритм добре підходить та отримані результати якісно узгоджуються з експериментальними даними. Проте, даний алгоритм потребує значної модифікації у тих випадках, коли квадрат модуля амплітуди розсіяння має більш ніж одну точку максимуму.

3.2. Метод Лапласа для генерації подій у випадку амплітуди розсіяння з декількома точками максимуму. Алгоритм врахування інтерференції.

Як було показано у попередньому розділі, врахування інтерференційних внесків призводить до того, що з ростом енергії при фіксованій кількості вторинних частинок n квадрат модуля амплітуди розсіяння (2.16) досягає максимального значення в декількох різних точках. У цьому випадку алгоритм для другого етапу генерації не може бути застосовано у тому вигляді, як його було побудовано у попередньому підрозділі.

Спроби застосування алгоритму у такому вигляді в випадку декількох точок максимуму призводять до результатів, що не узгоджуються з експериментальними даними. Якщо ж розглядати одну з точок максимуму квадрата модуля амплітуди розсіяння та апроксимувати цю функцію в околі цієї точки рядом Тейлора, обмежуючись внесками другого порядку, то таким чином значно погіршується покриття фазового простору. В цьому випадку області інших точок максимуму будуть генеруватись з дуже малою ймовірністю у порівнянні з точками, що належать області точки максимуму, у якій розглядається апроксимація квадрата модуля амплітуди розсіяння рядом Тейлора.

Крім того, проблеми виникають ще на початку побудови функції квадрата модуля амплітуди розсіяння для процесів з утворенням великої кількості вторинних частинок, вже не кажучи про максимізацію цієї функції.

Проте, аналіз функції амплітуди розсіяння $T_n(\sqrt{s}, X)$ дозволяє виявити властивості цієї функції, що дозволяють в певному наближенні знаходити максимуми та апроксимувати цю функцію. Як ми вже бачили, функція $T_n(\sqrt{s}, X)$ є сумою великої кількості доданків, кожен з яких має єдину точку максимуму. З ростом енергії для фіксованого значення n , точки максимумів цих доданків віддаляються і лежать на $n-1$ вимірній сфері, оскільки отримуються одна з одної шляхом перестановки компонент. У випадку, коли уся сума $T_n(\sqrt{s}, X)$ має декілька точок максимуму, з міркувань симетрії ці точки повинні бути якимось чином симетрично розташовані відносно нуля. Тоді природно буде припустити, що в околі кожного окремого максимуму функції $T_n(\sqrt{s}, X)$ ця функція визначається саме тими доданками, максимуми яких знаходяться в околі цього конкретного максимуму усієї суми $T_n(\sqrt{s}, X)$. Усі інші доданки приймають значно менші значення в околі цієї точки максимуму. Тоді, як і при розрахунках інтерференційних внесків, можна спробувати розглянути часткову суму $A_n(\sqrt{s}, X)$ як апроксимацію повної амплітуди розсіяння в околі точки максимуму. При цьому, коли амплітуда розсіяння має єдину точку максимуму, функція $A_n(\sqrt{s}, X)$ точно співпадає з амплітудою розсіяння $T_n(\sqrt{s}, X)$. Така апроксимація дозволить при генеруванні покрити ті області фазового простору, у яких знаходяться точки максимуму повної суми $T_n(\sqrt{s}, X)$. При цьому необхідно враховувати внески від усіх таких функцій $A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X)$, де π – представники класів еквівалентності $[\pi] \in S_n / \sim$ (див. розділ 2).

З цією метою для кожного $n = 1 \dots N_{\max}$ генеруємо множину конфігурацій $\Omega_n = \{X_i \mid i = 1 \dots N_{1,n}\}$, використовуючи алгоритм описаний у попередньому підрозділі. В якості функції розподілу на даному кроці розглядаємо квадрат модуля часткової суми $\left| A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi} X) \right|^2$. Наступним кроком для кожної конфігурації $X_i \in \Omega_n$ розраховуємо значення функції

$$T_n(\sqrt{s}, X_i) \approx \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} \alpha_n(\hat{\pi} X_i), \quad (3.29)$$

де $\alpha_n(X)$ – розклад в ряд Тейлора функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ в околі її точки максимуму $\chi^{(0)}$.

Тоді відповідно до визначення функції $T_n(\sqrt{s}, X_i)$ квадрат модуля розрахованого значення

$$p_{n,i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_{1,n}} \left| \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} \alpha_n(\hat{\pi} X_j) \right|^2} \left| \sum_{[\pi] \in S_n / \sim} \alpha_n(\hat{\pi} X_i) \right|^2. \quad (3.30)$$

визначає ймовірність реалізації конфігурації X_i при генеруванні подій за умови, що на першому етапі генерування кількості вторинних частинок було отримано значення n . При цьому значення $N_{1,n}$ кількості конфігурацій, що генеруються на першому кроці, визначаються точністю, якої необхідно досягнути при генерації подій.

Таким чином, розбиття вершин діаграми на групи дозволяє розглянути множину усіх доданків суми $T_n(\sqrt{s}, X)$ у два етапи, розглядаючи перестановки в середині груп (сума по елементам класу $[\varepsilon]$) та перестановки між групами (сума по елементам множини $[\pi] \in S_n / \sim$). Врахування перестановок усере-

дині груп дозволяє використовувати часткову суму $A_n(\sqrt{s}, X)$ як наближення функції $T_n(\sqrt{s}, X)$ в околі її деякої точки максимуму. Це, в свою чергу, дозволяє забезпечити щільне покриття багатовимірного фазового простору в області точок максимуму функції $|T_n(\sqrt{s}, X)|^2$, тоді як врахування перестановок між групами дозволяє вирішити проблему врахування складного виду функції квадрата модуля амплітуди розсіяння $|T_n(\sqrt{s}, X)|^2$ шляхом наближеного розрахунку. Нагадаємо, що прямий розрахунок значення функції $|T_n(\sqrt{s}, X)|^2$ в довільній точці представляє значні складнощі, оскільки виникає необхідність розрахунку суми $n!$ доданків.

В наступному підрозділі наведено результати генерування подій запропонованим методом для моделювання залежності від швидкості інклюзивного перерізу по швидкості.

3.3. Генерування інклюзивного перерізу по швидкості і порівняння експериментом.

Генерування інклюзивного перерізу по швидкості і зіставлення з експериментом.

На рис. 3.3 - 3.8 представлено результати генерування подій запропонованим методом. В якості даних парціальних перерізів, необхідних для першого етапу генерування – генерування кількості вторинних частинок, що утворились в результаті непружного процесу розсіяння, узяті результати розрахунків з попереднього розділу. Для розрахунку моделі залежності від швидкості інклюзивного перерізу по швидкості було побудовано гістограми кількості подій для різних енергій наступним чином: ненормоване значення i -го біну $\tilde{h}_i$ гістограми, що представляє діапазон швидкостей $[y_i, y_{i+1}]$, дорівнює кількості

подій, конфігурація X яких містить принаймні одне значення бистроти вторинної частинки $y_j = X_j$, $j = 1 \dots n$, що належить i -му діапазону бистрот $[y_i, y_{i+1}]$. Нормоване значення біну визначається як $h_i = \tilde{h}_i / N_2$, де N_2 – загальна кількість згенерованих подій. З рис. 3.3 – 3.8 видно, що отримані результати *на якісному рівні* узгоджуються з експериментальними даними, наведеними у результатах розд. 2. А саме, генерування подій запропонованим методом дозволяє відтворити поведінку максимумів в залежності розподілу бистрот. На рис. 3.3 - 3.4 при низьких енергіях $\sqrt{s} = 5$ Гев та $\sqrt{s} = 8$ Гев відповідно, спостерігається єдиний максимум залежності при нульових бистротах.

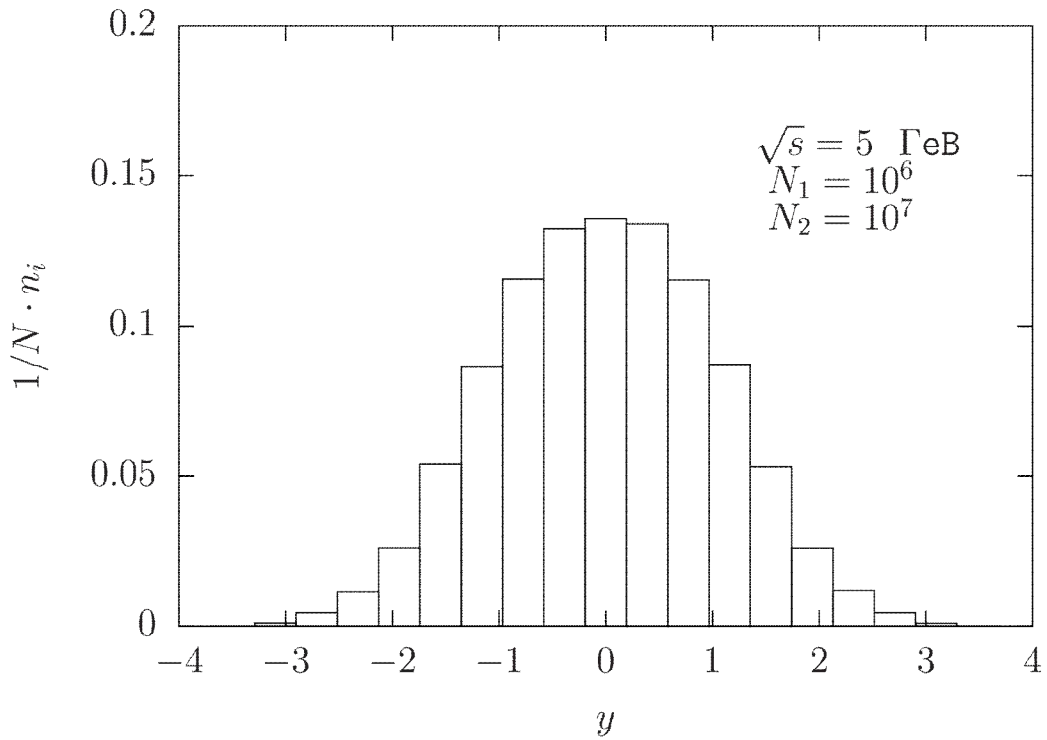


Рис. 3.3. Модель залежності від бистроти інклюзивного перерізу по бистроті при енергії $\sqrt{s} = 5$ Гев. $N_1 = 10^6$ – кількість конфігурацій.

$N_2 = 10^7$ – загальна кількість подій.

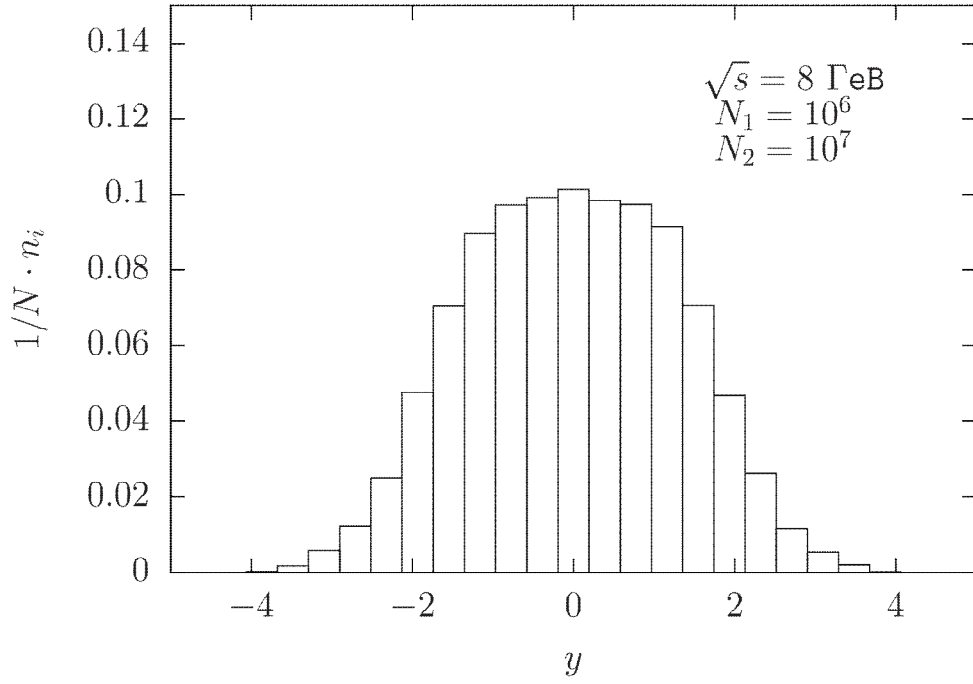


Рис. 3.4. Модель залежності від бистроти інклюзивного перерізу по бистроті при енергії $\sqrt{s} = 8$ ГеВ. $N_1 = 10^6$ – кількість конфігурацій.

$N_2 = 10^7$ – загальна кількість подій.

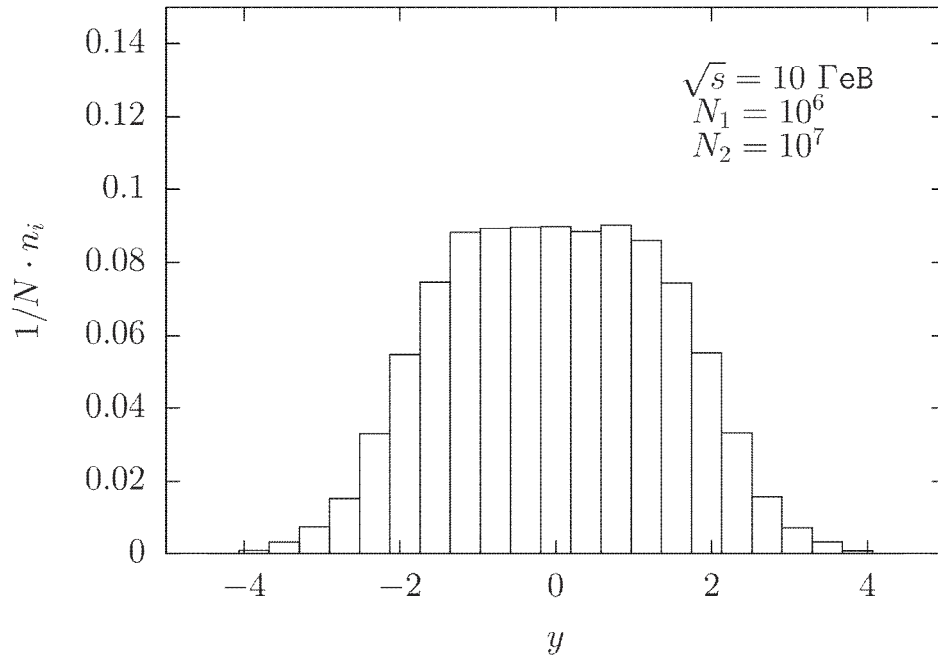


Рис. 3.5. Модель залежності від бистроти інклюзивного перерізу по бистроті при енергії $\sqrt{s} = 10$ ГеВ. $N_1 = 10^6$ – кількість конфігурацій.

$N_2 = 10^7$ – загальна кількість подій.

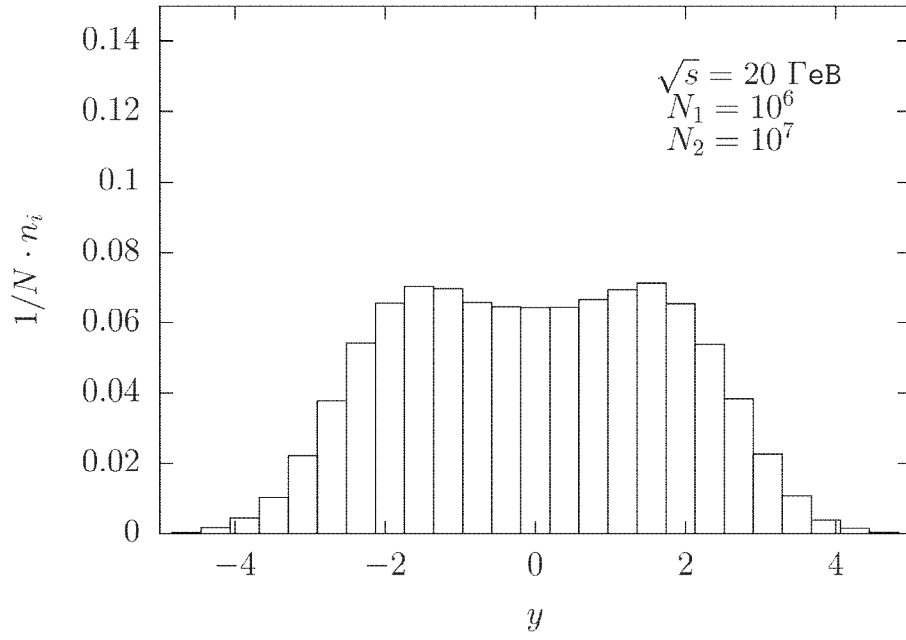


Рис. 3.6. Модель залежності від бистроти інклюзивного перерізу по бистроті при енергії $\sqrt{s} = 20$ ГеВ. $N_1 = 10^6$ – кількість конфігурацій.
 $N_1 = 10^7$ – загальна кількість подій.

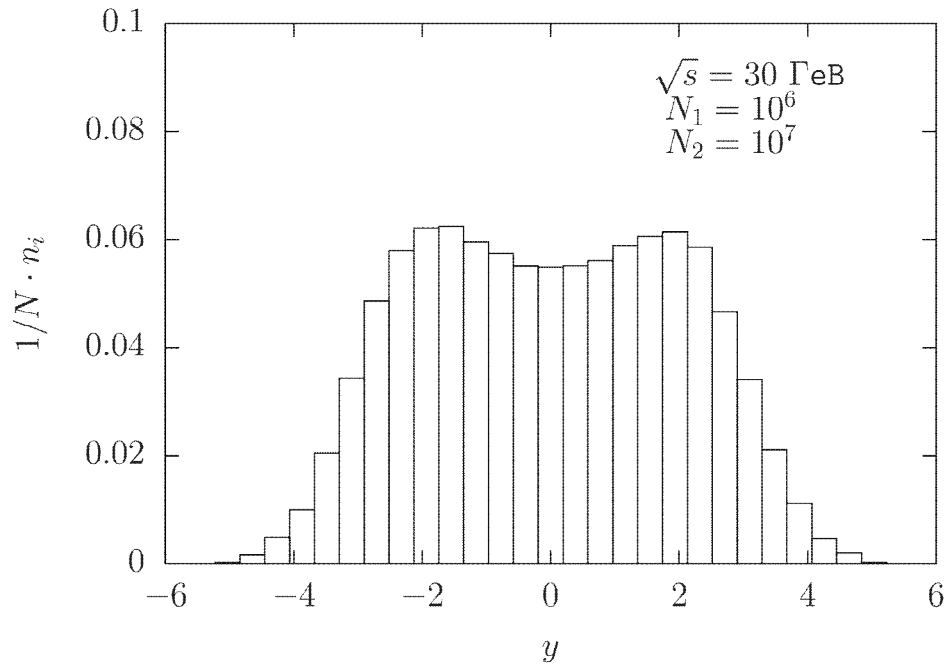


Рис. 3.7. Модель залежності від бистроти інклюзивного перерізу по бистроті при енергії $\sqrt{s} = 30$ ГеВ. $N_1 = 10^6$ – кількість конфігурацій.
 $N_1 = 10^7$ – загальна кількість подій.

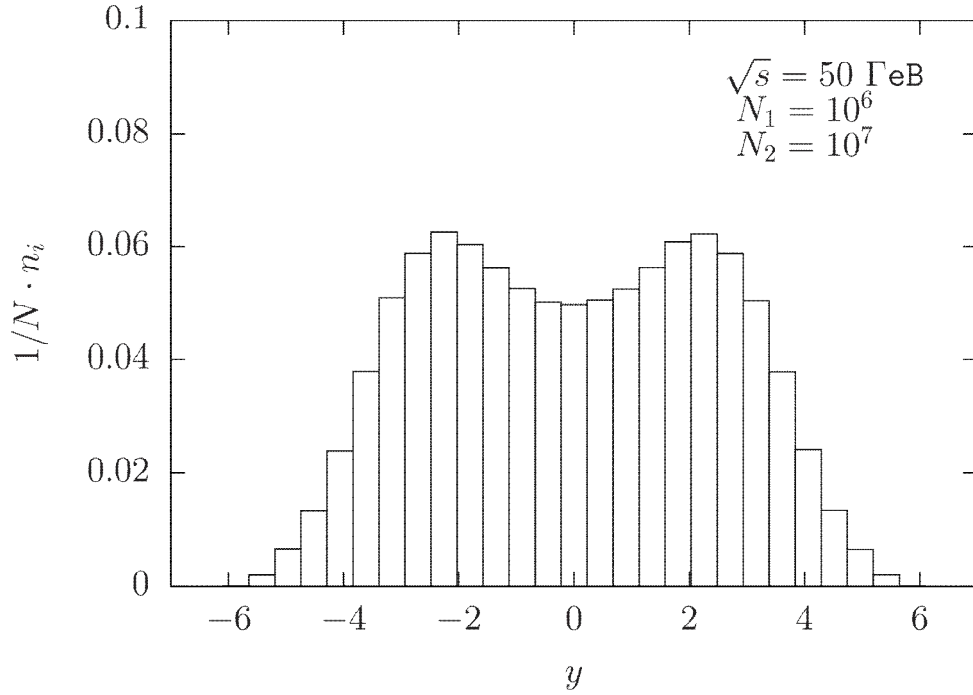


Рис. 3.8. Модель залежності від бистроти інклюзивного перерізу по бистроті при енергії $\sqrt{s} = 50$ Гев. $N_1 = 10^6$ – кількість конфігурацій.

$N_2 = 10^7$ – загальна кількість подій.

З ростом енергії до значення $\sqrt{s} = 10$ Гев можна бачити, що єдиний максимум залежності переходить у плато (рис. 3.5). Подальше зростання енергії призводить до утворення декількох окремих максимумів, симетрично розташованих відносно нуля (рис. 3.6 -3.8).

3.4. Висновки до розділу 3.

Запропоновано новий алгоритм генерування подій, оснований на методі Лапласа, який дозволяє генерувати події з утворенням декількох десятків частинок (~ 50) методом матричних елементів.

Запропоновано і реалізовано новий алгоритм генерації подій з урахуванням інтерференційних внесків. Показано, що існує суто алгоритмічний

спосіб опису інтерференційних ефектів, який не може бути відтворений ані шляхом аналітичних, ані шляхом чисельних розрахунків.

Результати генерації за допомогою запропонованого алгоритму оброблені із метою отримання інклюзивного перерізу по швидкості. Результат на рівні якісного збігу узгоджується з експериментальними даними.

РОЗДІЛ 4.

МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ МОНТЕ-КАРЛО ГЕНЕРАЦІЇ ПАРТОННИХ І АДРОННИХ ЗЛИВ МЕТОДОМ МАТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В двох попередніх розділах було розглянуто методи врахування інтерференційних внесків та метод генерування непружних подій розсіяння в рамках моделі «фі-три», обмежуючись лише діаграмами типу гребінка. В цьому розділі покажемо, що ці методи можуть бути застосовані для ширшої множини діаграм моделі «фі-три» типу наведеної на рис. 4.1

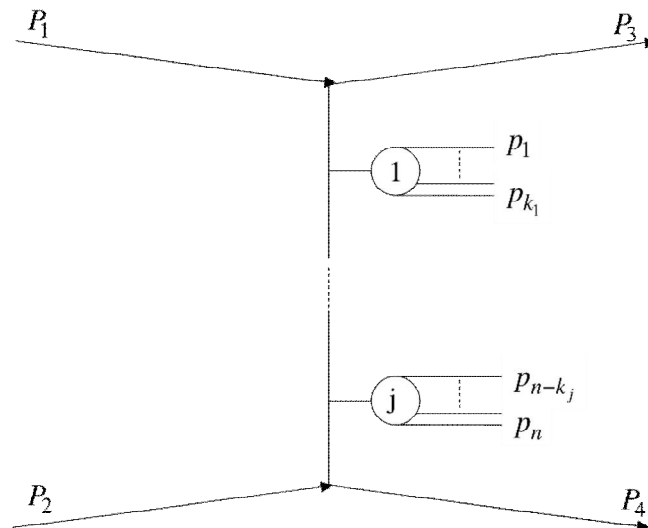


Рис. 4.1. Приклад діаграми моделі фі-три, що описує утворення декількох адронних струменів.

Тут кожне коло позначає суму всіх можливих безпетльових (деревних) діаграм із однією вхідною лінією і заданою кількістю вихідних ліній. Приклад однієї з можливих діаграм наведено на рис. 4.2.

За допомогою методу Лапласа далі буде показано, що подібні діаграми описують процес творення декількох злив. Маючи на меті сконцентруватися саме на розробці алгоритму генерування, розглянемо ці зливи в найпростішій

моделі «фі-три», але розроблений метод генерування може бути застосований для КХД аналогів цих діаграм при генеруванні партонних злив [11], а відповідні діаграми в межах ефективних теорій поля - для генерування адронних злив. Зазначимо, що метод, який розглядається в цьому розділі, можна використовувати для моделювання процесів з утворенням достатньо великої кількості злив і великих кількостей вторинних частинок в зливі, використовуючи при цьому для генерування метод матричних елементів.

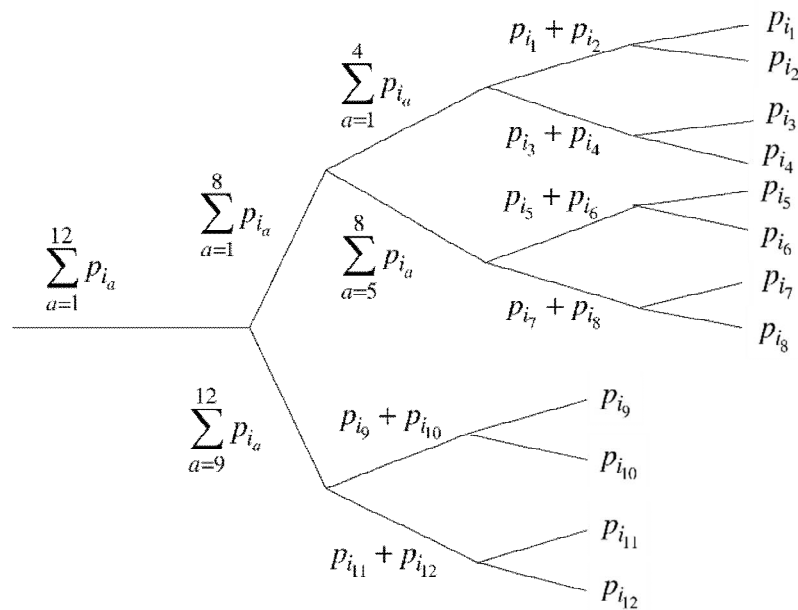


Рис. 4.2. Приклад типової деревної діаграми.

Побудуємо за допомогою діаграми, показаної на рис. 4.3 , всі можливі діаграми з однією входною і трьома вихідними лініями. Додаткова вихідна лінія на довільній діаграмі може з'явитися лише разом із вершиною, до якої вона приєднана. Оскільки мова йде про діаграми моделі фі-три, до цієї вершини приєднуються ще дві лінії. Якщо ми обидві ці лінії спаримо із якимись двома зовнішніми лініями діаграми рис. 4.3 , то отримаємо петлю. Тому маючи на меті побудувати безпетльову діаграму ми спаримо одну із цих ліній з однією із зовнішніх ліній діаграми рис. 4.3. Тоді за рахунок спарювання матимемо мінус одну зовнішню лінію, але одночасно додаються дві зовнішні

лінії від приєднаної вершини. Таким чином, дійсно отримаємо діаграму із кількістю вихідних ліній, більшою на одиницю від кількості таких ліній у діаграмі на . Якщо, згідно з [139, 140], спарювати лінію від вершини, що додається послідовно із кожною зовнішньою лінією діаграми рис. 4.3, отримаємо всі можливі діаграми із трьома вихідними лініями. Цей процес показано на рис. 4.4.

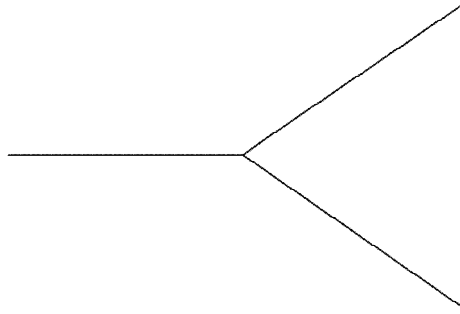


Рис. 4.3. Найпростіший безпетльовий блок теорії фі-три.

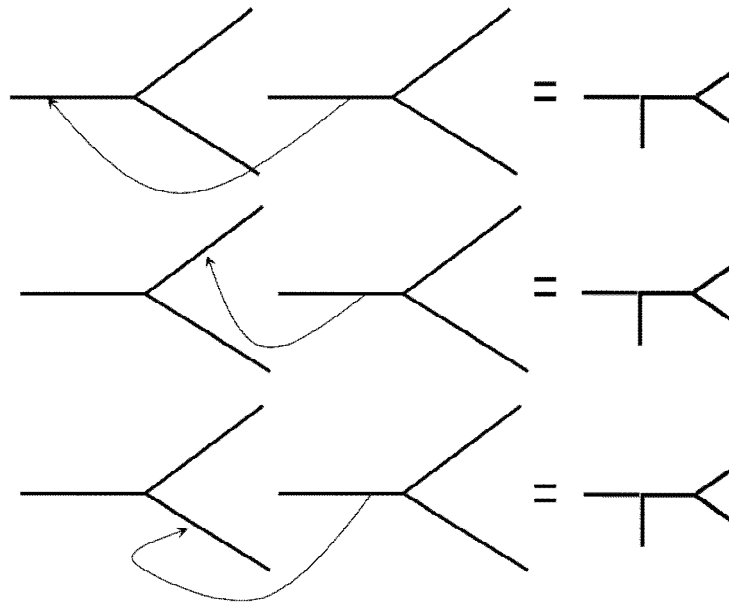


Рис. 4.4. Варіанти приєднання нової вершини до найпростішої діаграми.

Як видно з рис. 4.4, в усіх трьох випадках отримано одну й ту саму діаграму. Оскільки теорема Віка вимагає враховувати всі можливі варіанти спа-

рювань, ми маємо врахувати внески всіх трьох діаграм або прямим підсумуванням, або введенням вагового множника. Суттєвим є той факт, що додавання однієї вихідної лінії до діаграми супроводжується додаванням однієї вершини та однієї внутрішньої лінії. Так відбувається тому, що та із зовнішніх ліній вихідної діаграми, з якою спарюється лінія з доданої вершини, стає внутрішньою лінією. Описаний процес додавання вершин можна продовжувати, починаючи тепер з діаграми рис. 4.4.

Припустимо, що таким чином ми побудували всі деревні діаграми із n зовнішніми лініями і хочемо використати ці діаграми до побудови множини всіх діаграм із $n + 1$ зовнішньою лінією. Знову додавання цієї лінії можливе лише разом із вершиною, до якої приєднані ще дві лінії. Доведемо, що якщо обидві ці лінії спарити з двома зовнішніми лініями довільної діаграми попереднього кроку із n зовнішніми лініями, то ми обов'язково отримаємо петлю. Дійсно, припустимо, що нам потрібно прокласти шлях уздовж ліній діаграми від деякої вихідної лінії до вхідної. Приклад такого шляху показано стрілками на рис. 4.5. При цьому домовимось, що дозволеними є лише такі шляхи, коли жодна лінія діаграми не проходиться двічі.

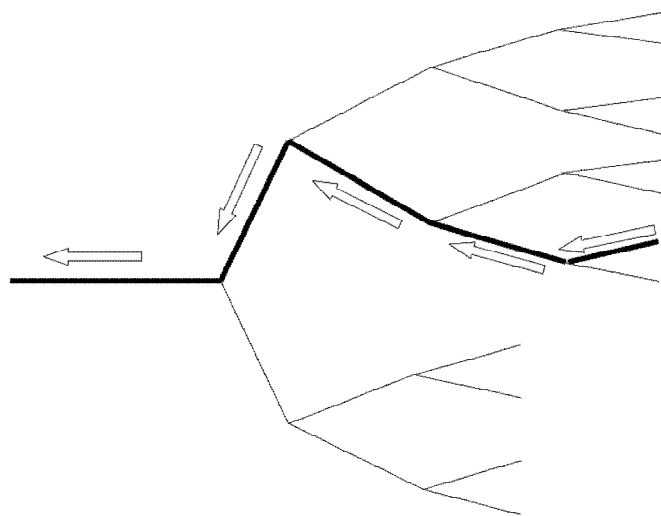


Рис. 4.5. Приклад дозволеного шляху уздовж діаграми.

Приклад забороненого шляху, який містить лінію, що проходиться двічі, показано на рис. 4.6.

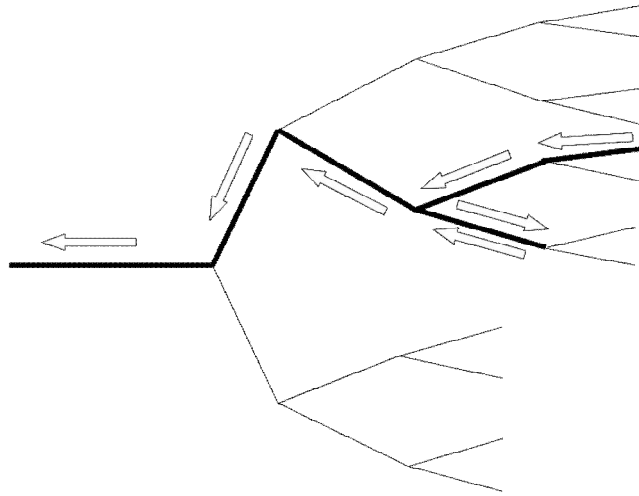


Рис. 4.6. Приклад забороненого шляху уздовж діаграми.

Тоді те, що діаграма не містить петель, означає, що для кожної вихідної лінії існує лише один дозволений шлях, яким можна, входячи в діаграму через вихідну лінію, вийти з діаграми через вхідну лінію. Припустимо, що додаючи до діаграми з n зовнішніми лініями нову вершину, ми дві приєднані до неї лінії спаримо із двома вихідними лініями. Від кожної із цих зовнішніх ліній існував один шлях до вхідної лінії. Тому, рухаючись від доданої лінії через кожну із них, ми отримаємо два різні шляхи виходу з діаграми через вхідну лінію. Це, вочевидь, призведе до формування петлі. Тому, додаючи нову вершину до діаграми, для того, щоб не утворювалося петель, ми маємо лише спарити її з однією із зовнішніх ліній діаграми попереднього кроку, обираючи цю лінію всіма можливими способами. При цьому ця зовнішня лінія перетвориться на внутрішню і ми матимемо плюс одну внутрішню лінію.

В той же час, матимемо мінус одну зовнішню лінію, але одночасно - плюс дві зовнішні лінії від доданої вершини, тобто перехід від діаграми з n зовнішніми лініями до діаграми з $n + 1$ зовнішніми лініями супроводжувати-

меться додаванням однієї вершини, однієї внутрішньої лінії та однієї зовнішньої лінії.

Звідси випливає важливий висновок: всі деревні діаграми з певною кількістю зовнішніх ліній мають однакову кількість вершин та однакову кількість внутрішніх ліній. Це означає, що якщо зібрати постійні множники, які відповідають вершинам і внутрішнім лініям, то отримаємо один й той самий коефіцієнт при різних діаграмах із певною кількістю зовнішніх ліній. Розглядаючи суму всіх таких діаграм, ми можемо цей спільний коефіцієнт винести за дужки.

Деревний блок, що відповідає діаграмі рис. 4.3, містить три зовнішні лінії, одну вершину і жодної внутрішньої лінії. Блок наступного кроку рис. 4.4 містить дві вершини, чотири зовнішні лінії та одну внутрішню. Оскільки на кожному кроці розглянутої вище процедури додається по одній вершині, внутрішній і зовнішній лінії, то співвідношення між кількостями зовнішніх, внутрішніх ліній і вершин зберігається. А саме, кількість внутрішніх ліній на три менша ніж зовнішніх, а кількість вершин на дві менша ніж кількість зовнішніх ліній. Відповідно, кількість внутрішніх ліній на одну менша ніж кількість вершин. Отже, для діаграми з n вихідними лініями (тобто з $n + 1$ зовнішніми лініями, враховуючи одну вхідну) матимемо $n - 1$ вершину. Відповідно матимемо множник $\left(-i(2\pi)^4 g\right)^{n-1}$, де g – константа зв'язку, що відповідає кожній вершині.

Кожній з $n - 2$ внутрішніх ліній, окрім фейнманівського знаменника, який розглядатиметься далі, зіставляється множник $\left(-\frac{i}{(2\pi)^4}\right)$. Ще один такий множник зіставляється вхідній лінії, бо вона на відміну від вихідних від-

повідляє віртуальній частинці. Тому маємо коефіцієнт $\left(-\frac{i}{(2\pi)^4}\right)^{n-1}$. З урахуванням коефіцієнту від вершин, отримаємо

$$\left(-i(2\pi)^4 g\right)^{n-1} \left(-\frac{i}{(2\pi)^4}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1} g^{n-1} \quad (4.1)$$

Окрім того, кожній внутрішній лінії, а також вхідній лінії зіставляється множник виду:

$$F = \frac{1}{m^2 - \left(\sum_a p_{i_a}\right)^2 - i\varepsilon}, \quad (4.2)$$

де m – маса π -мезону, ε – мала добавка, яка відповідає за обхід полюсів виразу (4.2), p_{i_a} – елементи підмножини чотириімпульсів.

Для різних ліній блоку кількість доданків у сумі $\sum_a p_{i_a}$ і підмножина, яку пробігають значення індексу a , є різними. Оскільки в кожній внутрішній лінії блоку зливаються щонайменше два чотириімпульси зовнішніх частинок, маємо

$$\left(\sum_a p_{i_a}\right)^2 \geq 4m^2. \quad (4.3)$$

Це означає, що для будь-якої внутрішньої лінії відповідний знаменник в фізичній області розглядуваного процесу не обертається в нуль і кожен з цих знаменників приймає від'ємне значення. Перша обставина дає змогу наблизити ε в (4.2) до нуля відразу, а не після закінчення розрахунків, друга – дозволяє записати замість (4.2)

$$F = \frac{1}{m^2 - \left(\sum_a p_{i_a}\right)^2}. \quad (4.4)$$

Збираючи знаки, що відповідають кожній внутрішній лінії і вхідній лінії, отримаємо $(-1)^{n-1}$. Цей множник компенсує аналогічний множник у виразі (4.1). В результаті дістаємо висновок, що кожен деревний блок із n вихідними лініями входить до діаграми типу рис. 4.1 в вигляді суттєво додатного множника із коефіцієнтом g^{n-1} (не враховуючи множника, що походить з вершини до діаграми 0, до якої приєднується блок). Далі ми доведемо, що величина цього суттєво додатного множника буде максимально можливою за умови, що всі чотири імпульси, які відповідають вихідним лініям цього блоку, однакові.

4.1. Точка максимуму амплітуди розсіяння деревної діаграми загального виду в моделі фі-три та її зв'язок з генерацією злив

Дійсно, знаменник виразу (4.4) за однакових значень чотиріімпульсів і з урахуванням умови масової поверхні прийматиме значення

$$D = (k^2 - 1)m^2, \quad (4.5)$$

де k – кількість доданків, що утворюють суму $\sum_a p_{i_a}$, яка входить у вираз (4.4).

Позначатимемо далі ці імпульси індексами від 1 до k і перепишемо вираз (4.4) у вигляді

$$F = \frac{1}{(k^2 - 1)m^2 + \Delta D}, \quad (4.6)$$

$$\text{де } \Delta D = \left(\sum_{a=1}^k p_a \right)^2 - k^2 m^2.$$

Врахуємо тепер, що квадрат суми чотиріімпульсів, які входять в вираз для ΔD може бути записаний у вигляді

$$\left(\sum_{a=1}^k p_a\right)^2 = \sum_{a=1}^k (p_a)^2 + 2\sum_{a=1}^{k-1} \sum_{b=a+1}^k p_a p_b = km^2 + 2\sum_{a=1}^{k-1} \sum_{b=a+1}^k p_a p_b. \quad (4.7)$$

Відповідно, величина ΔD (4.6) приймає вигляд

$$\Delta D = 2\sum_{a=1}^{k-1} \sum_{b=a+1}^k p_a p_b - k(k-1)m^2. \quad (4.8)$$

Врахуємо, що

$$\sum_{a=1}^{k-1} \sum_{b=a+1}^k m^2 = k(k-1)m^2, \quad (4.9)$$

тоді

$$\Delta D = 2\sum_{a=1}^{k-1} \sum_{b=a+1}^k \left(\sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} \sqrt{m^2 + \vec{p}_b^2} - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b) - m^2 \right). \quad (4.10)$$

Тут враховано також умову масової поверхні і позначено через $\vec{p}_a$ і $\vec{p}_a$ сукупності просторових компонент відповідних чотириімпульсів.

Зробимо далі перетворення

$$\begin{aligned} \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} \sqrt{m^2 + \vec{p}_b^2} - m^2 &= \frac{(m^2 + \vec{p}_a^2)(m^2 + \vec{p}_b^2) - m^4}{(m^2 + \vec{p}_a^2)(m^2 + \vec{p}_b^2) + m^2} = \\ &= \frac{m^2(\vec{p}_a^2 + \vec{p}_b^2) + \vec{p}_a^2 \vec{p}_b^2}{\sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} \sqrt{m^2 + \vec{p}_b^2} + m^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Після цього матимемо

$$\begin{aligned} \Delta D &= 2\sum_{a=1}^{k-1} \sum_{b=a+1}^k \left[\frac{1}{(m^2 + \vec{p}_a^2)(m^2 + \vec{p}_b^2) + m^2} \right. \\ &\times \left. \left(m^2(\vec{p}_a^2 + \vec{p}_b^2) + \vec{p}_a^2 \vec{p}_b^2 - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b) \left(\sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} \sqrt{m^2 + \vec{p}_b^2} + m^2 \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В чисельнику цього виразу зручно перегрупувати доданки таким чином:

$$\begin{aligned}
 m^2(\vec{p}_a^2 + \vec{p}_b^2) + \vec{p}_a^2 \vec{p}_b^2 - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b) \left(\sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} \sqrt{m^2 + \vec{p}_b^2} + m^2 \right) = \\
 = \frac{1}{2} m^2 \vec{p}_a^2 + \frac{1}{2} \vec{p}_a^2 \vec{p}_b^2 + \frac{1}{2} m^2 \vec{p}_b^2 + \frac{1}{2} \vec{p}_a^2 \vec{p}_b^2 \\
 - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b) \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} \sqrt{m^2 + \vec{p}_b^2} \\
 + \frac{1}{2} m^2 \vec{p}_a^2 - m^2 (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b) + \frac{1}{2} m^2 \vec{p}_b^2.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Після цього замість (4.12) легко отримати:

$$\Delta D = \sum_{a=1}^{k-1} \sum_{b=a+1}^k \frac{\left(\vec{p}_a \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} - \vec{p}_b \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2} \right)^2 + m^2 (\vec{p}_a - \vec{p}_b)^2}{(m^2 + \vec{p}_a^2)(m^2 + \vec{p}_b^2) + m^2}. \tag{4.14}$$

Як видно з виразів (4.14) і (4.6)

$$\Delta D \geq 0, \quad F = \frac{1}{(k^2 - 1)m^2 + \Delta D} \leq \frac{1}{(k^2 - 1)m^2}. \tag{4.15}$$

В той же час, з цих виразів видно, що, якщо хоча б якісь два з чотиріімпульсів, які входять в суму в виразі (4.2), не дорівнюють один одному, то нерівності (4.15) стають строгими. Отже, кожний множник типу (4.6) досягає максимального значення лише за умови рівності між собою всіх чотиріімпульсів, які в нього входять. Деревний блок є добутком множників типу (4.6). Оскільки кожен з цих множників є додатним, то нерівності (4.15) для всіх ліній деревного блоку можна перемножити між собою. При цьому за умови рівності між собою чотиривекторів енергії-імпульсу всіх реальних частинок, що є вихідними для цього блоку, в усіх нерівностях реалізуються саме рівності.

Звідси можна зробити висновок, що деревний блок досягає свого максимального значення за умови рівності між собою чотиривекторів енергії-імпульсу всіх реальних частинок, які з цього блоку виходять. Тобто такий

деревний блок буде описувати народження частинок зі скорельованими чотириімпульсами і тому його можна розглядати як модель адронної зливи [141].

З наведених міркувань випливає, що умовою максимальності множника, яка відповідає кожному деревному блоку на рис. 4.1, є рівність між собою тривимірних компонент імпульсів всіх вторинних частинок, що приєднуються до блоку. При цьому саме спільне значення імпульсів може бути яким завгодно, бо деревний блок від нього не залежить внаслідок умови масової поверхні для кожної вторинної частинки. Але ці значення імпульсів для кожного деревного блоку можуть бути встановлені шляхом максимізації модуля виразу, який відповідає усій діаграмі рис. 4.1.

Таким чином, модель, заснована на діаграмах типу рис. 4.1, виявляється аналогічною моделі, розглянутої в попередніх розділах. Аналогом груп частинок, в яких максимум досягається при однакових значеннях чотириімпульсів частинок в групі, виступають деревні блоки. Це дає змогу застосувати для розрахунків і генерації подій метод, розроблений в цій роботі. До того ж, застосування методу Лапласа спрощує процедуру побудови блоків з урахуванням всіх можливих діаграм без петель. В межах методу Лапласа щодо кожного такого блоку нам достатньо знайти лише його значення в точці максимуму (тобто при рівних імпульсах вторинних частинок), а також другі похідні по компонентах цих імпульсів в тій самій точці максимуму.

Для дерев з двома і трьома лініями вторинних частинок, всі варіанти діаграм перелічено на рис. 4.3 - 4.4. Для них легко розрахувати і значення в точці максимуму, і другі похідні в точці максимуму. Розрахунок потрібних величин для дерев із більшою кількістю вторинних частинок можна провести рекурентно. Відповідна процедура пояснюється на рис. 4.7.

Як видно з рис. 4.7, вхідна лінія діаграми розгалужується на дві лінії, до кожної з яких приєднується дерево з меншою кількістю вторинних частинок. При цьому під k і $n - k$ на рис. 4.7 ми розуміємо саме суму всіх можли-

вих безпетльових діаграм із відповідною кількістю ліній вторинних частинок. Вираз, що зіставляється деревам k і $n - k$, можна побудувати, рухаючись уздовж діаграми від вихідних ліній до вхідної. Тому вирази для блоків k і $n - k$ будуть однаковими як у випадку, коли вони є «самостійними» деревами, що приєднуються до діаграми типу рис. 4.1, так і у випадку, коли вони приєднуються до гілок на рис. 4.7.

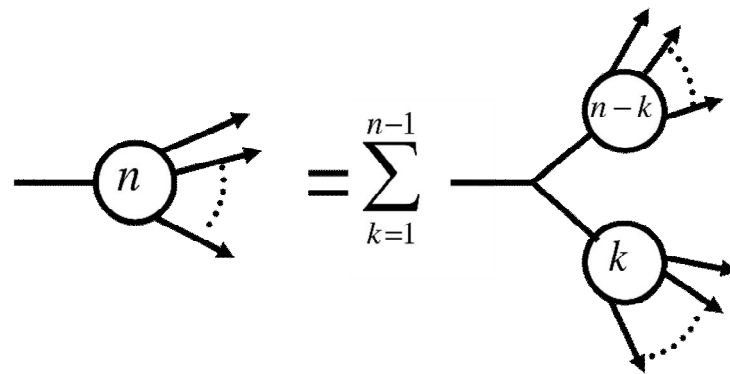


Рис. 4.7. Рекурентна процедура побудови деревного блоку з n лініями вторинних частинок.

Записуючи аналітичний вираз, що відповідає діаграмі рис. 4.7, і покладаючи імпульси частинок рівними між собою, можемо знайти величину блоку n в точці максимуму через величини, розраховані на попередніх кроках рекурентної процедури. Так само, диференціюючи вираз, що відповідає рис. 4.7, потрібну кількість разів можна знайти похідні довільного порядку від блоку n в точці максимуму через величини, розраховані на попередніх кроках.

Розглянемо докладніше процедуру розрахунку похідних від деревного блоку типу, зображеного на рис. 4.7. Позначимо аналітичний вираз для цього блоку як $B_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Аргументами цієї функції є чотириімпульси вторинних частинок, яким відповідають лінії, що приєднуються до блоку. Оскі-

льки значення функції $B_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$ є Лоренц-інваріантом, то і залежати вона повинна від Лоренц-інваріантів. Такими Лоренц-інваріантами є всі можливі скалярні добутки $(p_a p_b)$, $a = 1 \dots n$, $b = a \dots n$. Позначаючи множину всіх цих добутків як $\{(p_a p_b)\}$, можемо записати $B_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = B_n(\{(p_a p_b)\})$. В точці максимуму дерева всі чотири імпульси дорівнюють один одному. Це не залежить від того, чи є це дерево самостійним блоком, як B_n на рис. 4.7, чи воно є частиною більшого дерева, як B_k або B_{n-k} на тому ж рисунку. В точці максимуму таким чином будь-яка множина $\{(p_a p_b)\}$ зводиться до такої, що містить лише один елемент $\{m^2\}$. Тому значення будь якого дерева в точці максимуму однакове незалежно від розташування цього дерева на діаграмі. Наприклад, якщо деревний блок B_k є частиною двох різних дерев, що приєднуються до різних вершин на діаграмі рис. 4.7, в точці максимуму він буде мати однакові значення.

Розглянемо тепер перші похідні від блоку $B_n(\{(p_a p_b)\})$ по компонентах тривимірних імпульсів частинок, які приєднуються до блоку. Ці компоненти позначатимемо $(\vec{p}_a)^b$, $a = 1 \dots n$, $b = 1 \dots 3$. Тут a позначає номер імпульсу як аргументу функції $B_n(\{(p_a p_b)\})$, а b – номер просторової компоненти цього імпульсу. Ці просторові компоненти імпульсів входять до виразу для $B_n(\{(p_a p_b)\})$ лише через компоненти чотириімпульсів частинок, які позначатимемо $(p_e)^f$, $e = 1 \dots n$, $f = 0 \dots 3$. З урахуванням цього маємо

$$\frac{\partial B_n(\{(p_a p_b)\})}{\partial (\vec{p}_c)^d} = \sum_{l=0}^3 \frac{\partial B_n(\{(p_a p_b)\})}{\partial (p_c)^l} \frac{\partial (p_c)^l}{\partial (\vec{p}_c)^d} \quad (4.16)$$

Похідні $\partial (p_c)^l / \partial (\vec{p}_c)^d$ легко розрахувати явно:

$$\frac{\partial(p_c)^l}{\partial(\vec{p}_c)^d} = \frac{(\vec{p}_c)^d}{\sqrt{m^2 + \vec{p}_c^2}} \delta_0^l + \delta_d^l. \quad (4.17)$$

Внаслідок цього їх розрахунок легко реалізувати при чисельному розрахунку у вигляді відповідної підпрограми.

Розглянемо четвірку похідних $\frac{\partial B_n(\{p_a p_b\})}{\partial(p_c)^l}$, $l = 0 \dots 3$. Оскільки мова

йде про похідні від скалярної функції по компонентам контраваріантного чотири-вектора, то вони утворюють коваріантний чотири-вектор. Оскільки єдині чотири-вектори, що входять у $B_n(\{p_a p_b\})$, є лише чотири-вектори енергії-імпульсу частинок, що приєднуються до дерева, то й похідні можуть за-

лежати лише від них. Тому можемо написати $\frac{\partial B_n(\{p_a p_b\})}{\partial(p_c)^l}$ як

$$\frac{\partial B_n(\{p_a p_b\})}{\partial(p_c)^l} = \sum_{d=1}^n K_{ndc}(\{p_a p_b\})(p_d)_l. \quad (4.18)$$

Тут $K_{ndc}(\{p_a p_b\})$ - коефіцієнтні функції. Їх вирази через їх аргументи залежать від внутрішньої структури дерева B_n , а значення визначаються скалярними добутками $\{p_a p_b\}$.

Формулу (4.18) можна обґрунтувати ще й таким чином. Всі чотириімпульси входять в вираз для блоку B_n лише через Лоренц-інваріанти, що є квадратичними по їх компонентах. Тоді диференціювання по компоненті чотириімпульсу передбачатиме суму добутків похідних від B_n по відповідних Лоренц-інваріантах на похідні від цих Лоренц-інваріантів по компонентах чотиріімпульсів. Перші з цих множників самі є Лоренц-інваріантами. Другі, як похідні від квадратичних виразів, є лінійними по компонентах чотириімпульсів. Тоді, збираючи коефіцієнти при кожній компоненті, отримаємо вираз (4.18).

Оскільки права частина рівності (4.18) є коваріантним чотиривектором, а ліва – лінійною комбінацією коваріантних чотиривекторів, то дістаємо висновку, що коефіцієнти $K_{ndc}(\{p_a p_b\})$ повинні бути скалярами, тобто маємо скалярні функції від множини $\{p_a p_b\}$. Тому кожна з функцій $K_{ndc}(\{p_a p_b\})$ аналогічна за своїми властивостями функції $B_n(\{p_a p_b\})$. Це означає, що значення коефіцієнтів $K_{ndc}(\{p_a p_b\})$ в точці максимуму залежать лише від виду дерева, але не залежать від того, як це дерево приєднане до діаграми. Тому в точці максимуму, де всі чотири імпульси однакові, маємо

$$\frac{\partial B_n(\{p_a p_b\})}{\partial (p_c)^l} = \left[\sum_{d=1}^n K_{ndc}(m^2) \right] p_l. \quad (4.19)$$

При цьому коефіцієнт $K_{ndc}(m^2)$ не залежить від спільного значення всіх чотири імпульсів. Відтак, він не залежить від того, як саме дерево приєднується до діаграми. Скористаймося цим результатом, щоб побудувати перші похідні від деревних блоків $B_n(\{p_a p_b\})$. Задля цього зробимо декілька зауважень щодо процедури рекурентної побудови деревних блоків.

Типова вершина теорії фі-три показана на рис. 4.8.

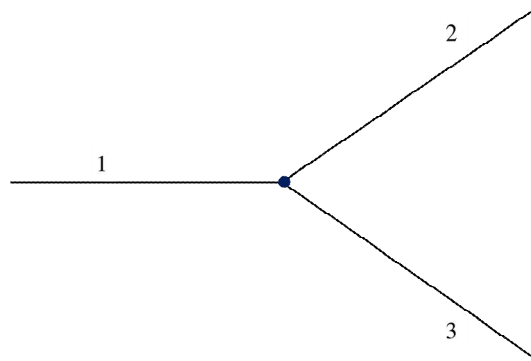


Рис. 4.8. Типова вершина теорії фі-три. Щоб підкреслити індивідуальність кожної лінії вони були пронумеровані.

Нагадаємо, що три лінії, які виходять з вершини, відповідають трьом операторним множникам, що входять в лагранжіан взаємодії. Це є три різні множники, які дорівнюють один одному. Це означає, що, якщо ми з одним і тим самим оператором, який входить або до іншої вершини, або відповідає зовнішній лінії, спаримо один раз оператор, який відповідає лінії 2 на рис. 4.8, а інший - лінії 3, то ми отримаємо різні варіанти спарювань. Згідно з теоремою Віка, обидва ці варіанти спарювань повинні бути враховані, тобто, якщо на будь-якій діаграмі ми переставимо $3!$ способами всі лінії, що приєднуються до кожної вершини, то отримуємо різні доданки в сумі по всіх спарюваннях, які повинні бути складені за теоремою Віка.

З іншого боку, всі ці доданки будуть рівними. Їх кількість дорівнюватиме $(3!)^{n_v}$ де n_v – кількість вершин діаграми. Тому при побудові діаграм ми можемо не враховувати діаграми, які отримуються одна з одної перестановкою ліній, що відповідають одній й тій самій вершині, але замість цього помножити внесок цієї діаграми на $(3!)^{n_v}$. Оскільки таким же чином в вираз для внеску діаграми в амплітуду розсіяння входить й константа зв'язку g , то можна ввести нову константу зв'язку $g' = 3!g$ і, тим самим, врахувати внески від діаграм, що відрізняються перестановкою ліній однієї й тієї ж вершини.

Приймаючи таке правило побудови діаграм, розглянемо процедуру рекурентної побудови блоку $B_n(\{p_a p_b\})$. Припустимо, що в нас вже побудовані деревні блоки, які відповідають меншій ніж n кількості вторинних частинок. Якщо $k_1 < n$, $k_2 < n$ та $k_1 + k_2 = n$, то процес побудови блоку B_n з блоків B_{k_1} і B_{k_2} пояснюється на рис. 4.9.

Лінію 1 залишимо для приєднання до решти діаграми рис. 4.1. Блок B_{k_1} приєднаємо до лінії 2, а блок B_{k_2} – до лінії 3. Якщо ми приєднаємо B_{k_1} до лінії 3, а B_{k_2} – до лінії 2, то отримаємо діаграму, яка відрізняється від попередньої лише перестановкою ліній 2 і 3. Тому такі діаграми не повинні враху-

ватися як різні за обговореним вище правилом. Також не повинні враховуватися діаграми, які відрізняються між собою лише перестановкою B_{k_1} і B_{k_2} . Щоб досягти цього приймемо правило: якщо $k_1 \neq k_2$, то дерево з більшою кількістю вторинних частинок приєднується до лінії 2 на рис. 4.9, а з меншою - до лінії 3. У випадку коли $k_1 = k_2$, діаграму будемо враховувати лише один раз, не переставляючи ці блоки між собою.

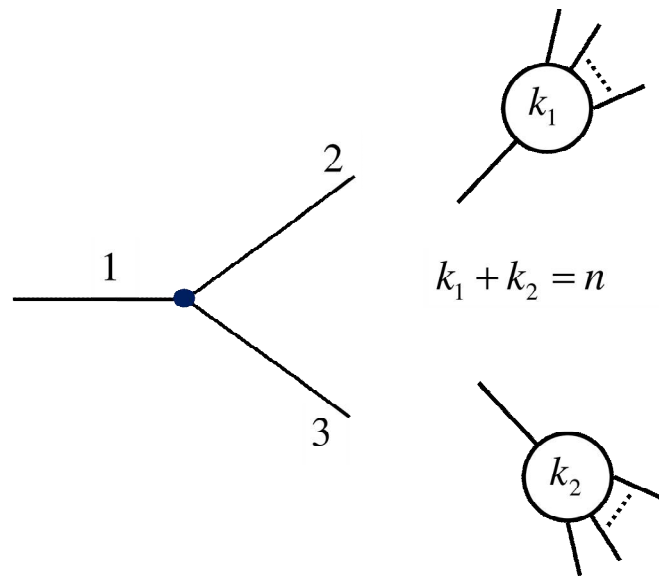


Рис. 4.9. Процес побудови деревного блоку з інших блоків з меншою кількістю вторинних частинок. Відсутність стрілок у вихідних ліній підкреслює, що на даному рисунку зображено неспарені лінії, які потім всіма можливими способами повинні бути спарені із лініями вторинних частинок.

При цьому множник, який відповідає вхідній лінії, включаємо до блоку, як це показано на рис. 4.10. Окрім того, на цьому етапі обиратимемо якийсь один спосіб приєднання зовнішніх ліній до діаграми, а суму по всіх перестановках врахуємо пізніше.

Враховуючи міркування, що наведені до формул (4.1) - (4.4), вираз, який відповідає блоку, зображеному на рис. 4.10, можемо записати:

$$\begin{aligned}
& B_n(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots n\}) = \\
& = \frac{1}{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)^2 - m^2} \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left[B_{n-k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = k_2 + 1 \dots n\}) \right. \\
& \quad \left. \times B_{k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \right]. \quad (4.20)_0
\end{aligned}$$

Тут через $[n/2]$ у верхній границі суми, як зазвичай, позначена ціла частина числа $n/2$. Позначення $B_n(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots n\})$ вказує на множину, яку утворюють всі можливі індекси чотириімпульсів, що утворюють скалярні добутки, які входять в множину $\{p_a p_b\}$. Розглянемо перших декілька кроків реалізації рекурентної процедури, заснованої на співвідношенні (4.20).

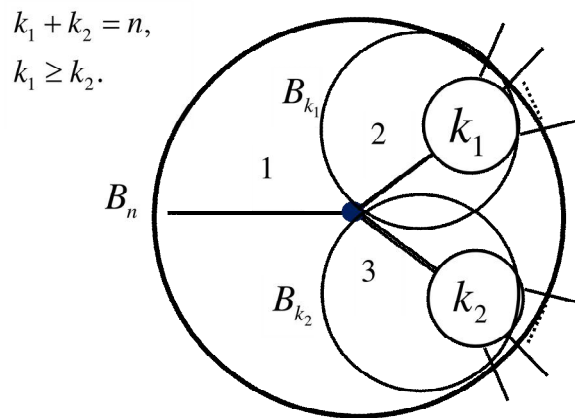


Рис. 4.10. Схематичне зображення блоків, що ілюструє включення вхідної лінії до блоку.

Блок B_1 містить лише одну зовнішню лінію і за правилами діаграмної техніки цій лінії нічого не зіставляється, тому

$$B_1 = 1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial (p_c)^l} = 0. \quad (4.21)$$

Блок $B_2\left(\left\{p_1^2, p_1 p_2, p_2^2\right\}\right)$ зображено на рис. 4.3 та його аналітичний вираз має вигляд

$$B_2\left(\left\{p_1^2, p_1 p_2, p_2^2\right\}\right) = \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2}. \quad (4.22)$$

Значення цього блоку в точці максимуму $p_1 = p_2 = p$ (де p – спільне значення чотириімпульсів p_1 і p_2 в точці максимуму, яке ми отримуємо шляхом максимізації всього внеску від діаграми рис. 4.1 в амплітуду розсіяння)

$$B_2^{\max} = \frac{1}{3m^2}. \quad (4.23)$$

Щодо похідних від цього блоку, то нагадаємо, що згідно з формулою (4.16), для розрахунку похідних по компонентах тривимірних імпульсів, достатньо розрахувати похідні по компонентах чотириімпульсів. Їх подальша згортка (4.16) з величинами (4.17), які легко обчислити по відомих значеннях імпульсів в точці максимуму, дасть нам потрібні величини. Для блоку B_2 розрахунок цих похідних пояснюється наступною послідовністю перетворень:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2\left(\left\{p_1^2, p_1 p_2, p_2^2\right\}\right)}{\partial (p_1)^c} &= \frac{\partial}{\partial (p_1)^c} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial (p_1)^c} \frac{1}{g_{ab}(p_1 + p_2)^a (p_1 + p_2)^b - m^2} = \\ &= -\frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial (p_1)^c} \left(g_{ab}(p_1 + p_2)^a (p_1 + p_2)^b \right) = \\ &= -\frac{2}{\left[(p_1 + p_2)^2 - m^2 \right]^2} \left[(p_1)_c + (p_2)_c \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Аналогічно, отримаємо й похідні по компонентах чотиривектора p_2 :

$$\frac{\partial B_2 \left(\{p_1^2, p_1 p_2, p_2^2\} \right)}{\partial (p_2)^c} = - \frac{2}{\left[(p_1 + p_2)^2 - m^2 \right]^2} \left[(p_1)_c + (p_2)_c \right] \quad (4.25)$$

Виходячи з цього та (4.18), маємо

$$K_{211} = K_{221} = K_{212} = K_{222} = - \frac{2}{\left[(p_1 + p_2)^2 - m^2 \right]^2} \quad (4.26)$$

при рівних чотиримпульсах в точці максимуму отримаємо

$$K_{211} = K_{221} = K_{212} = K_{222} = - \frac{2}{9m^4} \quad (4.27)$$

Отже, як зазначено вище, ці коефіцієнти в точці максимуму не залежать від чотиримпульсів і можуть бути розраховані для блоку B_2 незалежно від того, як він підключений до діаграми. Вводячи позначення

$$K_{21} = - \frac{4}{9m^4}, \quad K_{22} = - \frac{4}{9m^4}, \quad (4.28)$$

величини похідних в точці максимуму можемо записати:

$$\left(\frac{\partial B_2}{\partial (p_1)^c} \right)^{\max} = K_{21} p_c, \quad \left(\frac{\partial B_2}{\partial (p_2)^c} \right)^{\max} = K_{22} p_c. \quad (4.29)$$

Для блоку $B_3(\{p_a p_b\})$, у відповідності із розглянутими вище правилами, маємо одну діаграму, яку наведено на рис. 4.11:

$$B_3(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{(p_1 + p_1 + p_3)^2 - m^2} B_2(p_2, p_3). \quad (4.30)$$

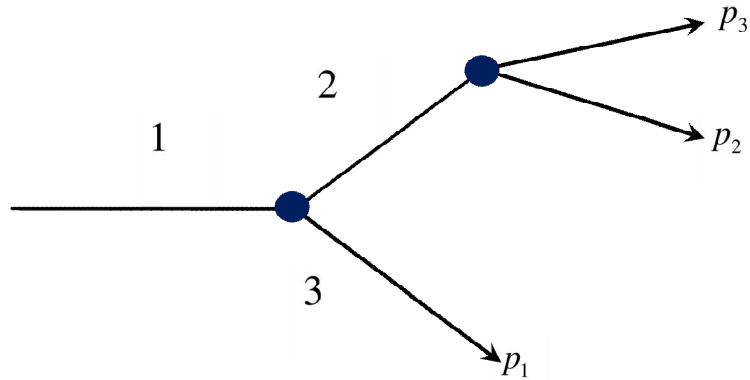


Рис. 4.11. Діаграма блоку $B_3(\{p_a p_b\})$.

Диференціюючи співвідношення (4.30), маємо

$$\frac{\partial B_3(p_1, p_2, p_3)}{\partial (p_1)^a} = - \frac{2(p_1 + p_1 + p_3)_a}{\left[(p_1 + p_1 + p_3)^2 - m^2 \right]^2} B_2(p_2, p_3), \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_3(p_1, p_2, p_3)}{\partial (p_2)^a} = & - \frac{2(p_1 + p_1 + p_3)_a}{\left[(p_1 + p_1 + p_3)^2 - m^2 \right]^2} B_2(p_2, p_3) \\ & + \frac{1}{(p_1 + p_1 + p_3)^2 - m^2} \frac{\partial B_2(p_2, p_3)}{\partial (p_2)^a}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_3(p_1, p_2, p_3)}{\partial (p_3)^a} = & - \frac{2(p_1 + p_1 + p_3)_a}{\left[(p_1 + p_1 + p_3)^2 - m^2 \right]^2} B_2(p_2, p_3) \\ & + \frac{1}{(p_1 + p_1 + p_3)^2 - m^2} \frac{\partial B_2(p_2, p_3)}{\partial (p_3)^a}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

В точці максимуму, тобто при $p_1 = p_1 = p_3 = p$, де компоненти чотирирівектора p визначаються тим, до якої вершини на рис. 4.1 приєднується дерево B_3 , або те дерево, частиною якого воно є, маємо:

$$\begin{aligned}
 B_3^{max} &= \frac{B_2^{max}}{8m^2} \\
 \left(\frac{\partial B_3}{\partial (p_1)^a} \right)^{max} &= \left(-\frac{3B_2^{max}}{32m^4} \right) p_a \\
 \left(\frac{\partial B_3}{\partial (p_2)^a} \right)^{max} &= \left(\frac{K_{21}}{8m^2} - \frac{3B_2^{max}}{32m^4} \right) p_a \\
 \left(\frac{\partial B_3}{\partial (p_2)^a} \right)^{max} &= \left(\frac{K_{22}}{8m^2} - \frac{3B_2^{max}}{32m^4} \right) p_a.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Величини B_2^{max} і K_{21} , K_{22} , що входять до цих співвідношень, визначаються формулами (4.26) і (4.28), тобто вони відомі з попередніх кроків розглядуваної рекурентної процедури.

Для подальшого введемо такі позначення

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial B_3}{\partial (p_i)^a} \right)^{max} &= K_{3i} p_a, \quad i=1,2,3 \\
 K_{31} &= -\frac{3B_2^{max}}{32m^4}, K_{32} = K_{33} = \frac{K_{22}}{8m^2} - \frac{3B_2^{max}}{32m^4}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Отже будемо й далі записувати похідні від блоків в точці максимуму в вигляді

$$\left(\frac{\partial B_c}{\partial (p_d)^a} \right)^{max} = K_{cd} p_a. \tag{4.36}$$

Розглянемо тепер перші похідні від блоку B_n

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial(p_d)^l} B_n(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots n\}) = \\
& = \frac{\partial}{\partial(p_d)^l} \frac{1}{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)^2 - m^2} \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left[B_{n-k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = k_2 + 1 \dots n\}) \right. \\
& \quad \left. \times B_{k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \right] \quad (4.37) \\
& + \frac{1}{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)^2 - m^2} \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \frac{\partial}{\partial(p_d)^l} \left[B_{n-k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = k_2 + 1 \dots n\}) \right. \\
& \quad \left. \times B_{k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \right].
\end{aligned}$$

і розглянемо детально перший доданок виразу (4.37)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial(p_d)^l} \frac{1}{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)^2 - m^2} \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left[B_{n-k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = k_2 + 1 \dots n\}) \right. \\
& \quad \left. \times B_{k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \right] = \\
& = - \frac{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)_l}{\left[\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)^2 - m^2\right]^2} \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left[B_{n-k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = k_2 + 1 \dots n\}) \right. \\
& \quad \left. \times B_{k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \right] \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Враховуючи вираз (4.20) для B_n , цей доданок можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)_l}{\left[\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)^2 - m^2\right]^2} \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left[B_{n-k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = k_2 + 1 \dots n\}) \right. \\
& \quad \left. \times B_{k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \right] = \\
& = - \frac{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)_l}{\left(\sum_{a=1}^n p_a\right)^2 - m^2} B_n(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots n\}). \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Тоді вираз (4.37) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial (p_d)^l} B_n(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots n\}) = \\
 & = - \frac{\left(\sum_{a=1}^n p_a \right)_l}{\left(\sum_{a=1}^n p_a \right)^2 - m^2} B_n(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots n\}) \\
 & + \frac{1}{\left(\sum_{a=1}^n p_a \right)^2 - m^2} \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left[\begin{aligned} & \times B_{k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \\ & + B_{n-k_2}(\{p_a p_b \mid a, b = k_2 + 1 \dots n\}) \\ & \times \frac{\partial B_{k_2}}{\partial (p_d)^l}(\{p_a p_b \mid a, b = 1 \dots k_2\}) \end{aligned} \right]. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Відповідно в точці максимуму отримаємо

$$\left(\frac{\partial B_n}{\partial (p_d)^l} \right)^{\max} = K_{nd} p_l, \quad (4.41)$$

де вираз для K_{nd} легко отримується з (4.40)

$$K_{nd} = - \frac{1}{(n^2 - 1)m^2} \left[n B_n^{\max} + \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left(K_{n-k_2, d-k_2} B_{k_2}^{\max} + B_{n-k_2}^{\max} K_{k_2, d} \right) \right]. \quad (4.42)$$

При цьому ми прийняли нумерацію зовнішніх імпульсів, за тим самим принципом, що й на рис. 4.11, тобто нумеруємо імпульси, починаючи від блоку з меншою кількістю частинок. Тому блок B_{n-k_2} залежить від імпульсів з індексами, починаючи від $k_2 + 1$. Тому в формулі (4.42) треба покласти

$$\begin{cases} K_{n-k_2, d-k_2} = 0, & \text{при } d - k_2 < 1 \\ K_{k_2, d} = 0, & \text{при } d > k_2 \end{cases}. \quad (4.43)$$

Тепер розглянемо другі похідні від B_n , необхідні для застосування методу Лапласа та описаного в попередніх розділах методу врахування інтерференційних внесків. Диференціюючи співвідношення (4.16), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_n(\{p_a p_b\})}{\partial(\vec{p}_e)^g \partial(\vec{p}_c)^d} &= \sum_{l=0}^3 \left(\sum_{h=0}^3 \frac{\partial B_n(\{p_a p_b\})}{\partial(p_e)^h \partial(p_c)^l} \frac{\partial(p_e)^h}{\partial(\vec{p}_e)^g} \right) \frac{\partial(p_c)^l}{\partial(\vec{p}_c)^d} \\ &+ \sum_{l=0}^3 \frac{\partial B_n(\{p_a p_b\})}{\partial(p_c)^l} \frac{\partial^2(p_c)^l}{\partial(\vec{p}_e)^g \partial(\vec{p}_c)^d} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Враховуючи, що компоненти чотириімпульсу p_c залежать лише від компонент тривимірного імпульсу з тим самим індексом, маємо

$$p_c = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + \vec{p}_c^2} \\ (\vec{p}_c)^1 \\ (\vec{p}_c)^2 \\ (\vec{p}_c)^3 \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

можемо записати

$$\frac{\partial^2(p_c)^l}{\partial(\vec{p}_e)^g \partial(\vec{p}_c)^d} = \delta_{ec} \frac{\partial^2(p_c)^l}{\partial(\vec{p}_c)^g \partial(\vec{p}_c)^d}, \quad (4.46)$$

де δ_{ec} – символ Кронекера.

З урахуванням (4.17) отримаємо

$$\frac{\partial^2(p_c)^l}{\partial(\vec{p}_c)^g \partial(\vec{p}_c)^d} = \frac{\delta_0^l}{\sqrt{m^2 + \vec{p}_c^2}} \left(\delta_{gd} - \frac{(\vec{p}_c)^d (\vec{p}_c)^g}{m^2 + \vec{p}_c^2} \right) \quad (4.47)$$

В точці максимуму, коли всі чотиривектори однакові, маємо

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 B_n}{\partial(\vec{p}_e)^g \partial(\vec{p}_c)^d} \right)^{\max} &= \sum_{l=0}^3 \sum_{h=0}^3 \left(\frac{\partial B_n}{\partial(p_e)^h \partial(p_c)^l} \right)^{\max} \frac{\partial p^h}{\partial(\vec{p})^g} \frac{\partial p^l}{\partial(\vec{p})^d} \\
&+ \sum_{l=0}^3 \frac{\partial B_n}{\partial(p_c)^l} \delta_{ec} \left(\delta_{gd} - \frac{(\vec{p})^d (\vec{p})^g}{m^2 + \vec{p}^2} \right) \frac{\delta_0^l}{\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Щодо цього виразу, то залишається розрахувати компоненти тензору

$$\left(\frac{\partial B_n}{\partial(p_e)^h \partial(p_c)^l} \right)^{\max}.$$

Компоненти цього тензору повинні виражатися через

компоненти спільного значення всіх чотириімпульсів дерева в точці максимуму p_a . При цьому оскільки тензор двічі коваріантний, він повинен виражатися через коваріантні компоненти чотиривектору. З цих компонент можна побудувати лише один двічі коваріантний тензор $p_a p_b$. Цей тензор, як і тензор других похідних, є симетричним. Окрім того, компоненти довільного симетричного тензору можуть виражатися через компоненти метричного тензора g_{ab} .

Тому загальна структура тензору $\left(\frac{\partial B_n}{\partial(p_e)^h \partial(p_c)^l} \right)^{\max}$ повинна бути наступною

$$\left(\frac{\partial B_n}{\partial(p_e)^h \partial(p_c)^l} \right)^{\max} = D_{nec}^{(1)} g_{hl} + D_{nec}^{(2)} p_h p_l. \tag{4.48}$$

Коефіцієнти $D_{nec}^{(1)}$ і $D_{nec}^{(2)}$ будуть розраховано рекурентним способом. Розглянемо цю процедуру на прикладі, як і для перших похідних. Оскільки блок B_1 є константою, всі його похідні дорівнюють нулю. Далі розглянемо блок B_2 . Диференціюючи співвідношення (4.25), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 B_2 \left(\{p_1^2, p_1 p_2, p_2^2\} \right)}{\partial (p_a)^d \partial (p_b)^c} = \frac{8}{\left[(p_1 + p_2)^2 - m^2 \right]^3} \left[(p_1)_d + (p_2)_d \right] \times \left[(p_1)_c + (p_2)_c \right] - \frac{2}{\left[(p_1 + p_2)^2 - m^2 \right]^2} g_{dc}, \quad (4.49)$$

де $a=1,2$ та $b=1,2$.

В цьому співвідношенні передбачається, що індекси a і b пробігають чотири пари значень $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ і для всіх цих пар результат подвійного диференціювання виявляється однаковим. В точці максимуму маємо:

$$\left(\frac{\partial^2 B_2}{\partial (p_b)^c \partial (p_b)^c} \right)^{\max} = -\frac{2}{9m^4} g_{dc} + \frac{32}{27m^6} p_d p_c. \quad (4.50)$$

Отже, порівнюючи з (4.48), отримуємо:

$$D_{2ab}^{(1)} = -\frac{2}{9m^4}, \quad D_{2ab}^{(2)} = \frac{32}{27m^6}. \quad (4.51)$$

Вирази для коефіцієнтів $D_{nec}^{(1)}$ та $D_{nec}^{(2)}$ у виразі (4.48) можна знайти, якщо зібрати доданки з $p_h p_l$ та g_{hl} після диференціювання виразу (4.40) (процедуру диференціювання цього виразу детально розглянуто у додатку):

$$D_{ncd}^{(1)} = \frac{1}{(n^2 - 1)m^2} \left[\sum_{k_2=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(B_{k_2}^{\max} D_{n-k_2,cd}^{(1)} + B_{n-k_2}^{\max} D_{k_2cd}^{(1)} \right) - B_n^{\max} \right]. \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}
D_{ncd}^{(2)} = & \frac{1}{(n^2 - 1)m^2} \left[\sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left(B_{k_2}^{\max} D_{n-k_2,cd}^{(2)} + B_{n-k_2}^{\max} D_{k_2cd}^{(2)} \right) \right. \\
& + \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \left(K_{n-k_2,d-k_2} K_{k_2,c} + K_{n-k_2,c-k_2} K_{k_2,d} \right) \\
& \left. - \sum_{k_2=1}^{[n/2]} \frac{1}{(n^2 - 1)m^2} \left(B_{k_2}^{\max} K_{n-k_2,d-k_2} + B_{n-k_2}^{\max} K_{k_2,d} \right) n \right] \\
& + \frac{1}{(n^2 - 1)m^2} n^2 B_n^{\max} - n K_{nc}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Запропонована рекурентна процедура розрахунку перших та других похідних від виразу B_n дозволяє застосувати цей метод врахування інтерференційних внесків для розрахунку внесків у перерізи не тільки від діаграм типу «гребінка», а й від усіх можливих безпетльових діаграм.

Виявляється, що вираз B_n , який відповідає діаграмі виду рис. 4.1 з певною кількістю дерев k , має аналогічні властивості, що й вираз $A_n(\sqrt{s}, X)$ у розділі 2 для діаграми, вершини якої згруповані у k груп: в точці максимуму виразу, що відповідає діаграмі виду рис. 4.1, імпульси вторинних частинок приймають однакові значення в середині кожного окремого дерева, так само як й імпульси вторинних частинок в середині груп діаграми типу «гребінка» у точці максимуму функції $A_n(\sqrt{s}, X)$. Іншими словами, імпульси вторинних частинок, що приєднуються до одного дерева, скорельовані та приймають однакові значення в точці максимуму виразу B_n . Таким чином, моделювання процесів розсіяння з врахуванням діаграм виду рис. 4.1 дозволяє моделювати адронні і партонні зливи (каскади вторинних частинок зі скорельованими імпульсами).

Крім того, в результаті протон-протонних зіткнень можливі утворення W -бозонів, які в результаті слабкої взаємодії розпадаються на електрон та антинейтрино. В результаті випромінювання фотонів електроном з великою

енергією можливі такі процеси, що представляються діаграмами типу «гребінка» та подібними до тих, що розглядаються в цьому розділі, але з вихідними фотонними лініями [142-144].

Проте, оскільки в цих процесах утворюються нескаларні частинки, то опис процесів слабкої взаємодії і застосування методів, розроблених в даній роботі, потребує подальших досліджень.

4.2. Аналіз внесків діаграм різної топології в парціальний переріз розсіяння з утворенням n вторинних частинок

У цьому підрозділі наведено результати розрахунків парціальних перерізів для діаграм виду рис. 4.1 при різних значеннях енергії та кількості вторинних частинок. Отримані результати для порівняння наведено разом з відповідними розрахунками для діаграм типу «гребінка», які було розглянуто у другому розділі.

Таким чином, можна порівняти внески від безпетльових діаграм з різною топологією. На вертикальних осях на рис. 4.12 - 4.14 показано значення безрозмірної величини $\tilde{\sigma}_n = \sigma_n / L^n$, де L – ефективна константа зв'язку (див. розділ 2). З отриманих результатів видно, що деревні діаграми виду рис. 4.1 в певному діапазоні енергій забезпечують суттєвий внесок у повний переріз розсіяння. На рис. 4.12 видно, що внесок у парціальний переріз від деревних діаграм виду рис. 4.1 з одним, двома та трьома вихідними деревами значно перевищують відповідний внесок від діаграм типу «гребінка» у діапазоні енергій від порогової енергії непружного розсіяння до енергії $\sqrt{s} \approx 55$ GeV.

При цьому, з ростом кількості вторинних частинок n , ширина області, в якій деревні діаграми забезпечують більший внесок ніж діаграми типу «гребінка», зростає, як це видно з рис. 4.13 – 4.14.

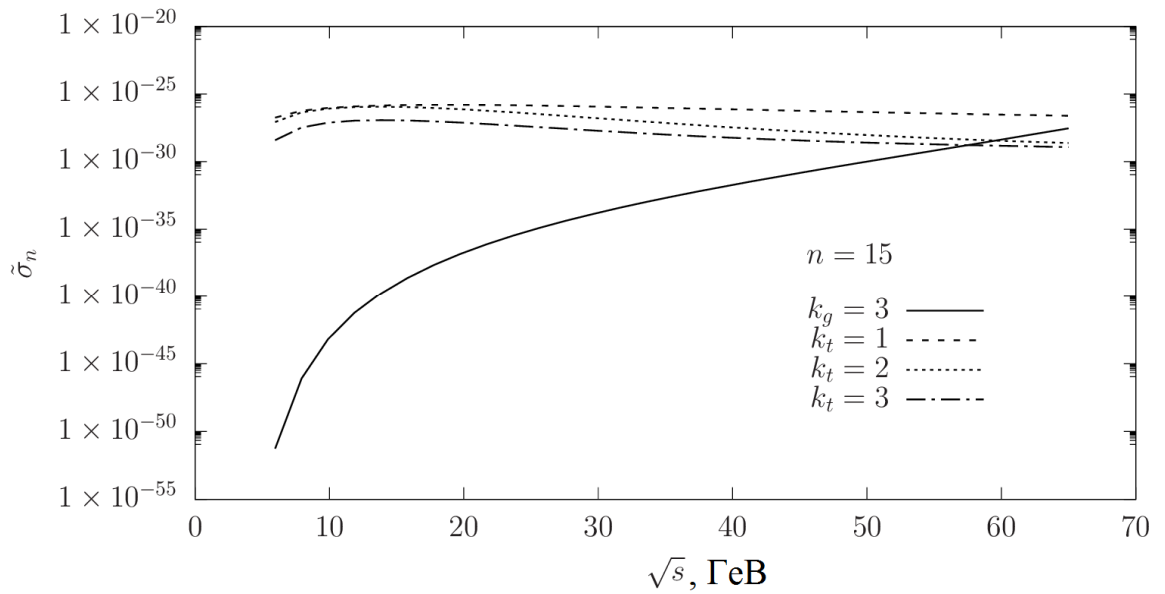


Рис. 4.12. Залежність внесків у парціальний переріз для діаграм виду «гребінка» (суцільна лінія) та деревних діаграм виду рис. 4.1 з одним, двома та трьома деревами (різні значення k_t) з утворенням $n = 15$ вторинних частинок.

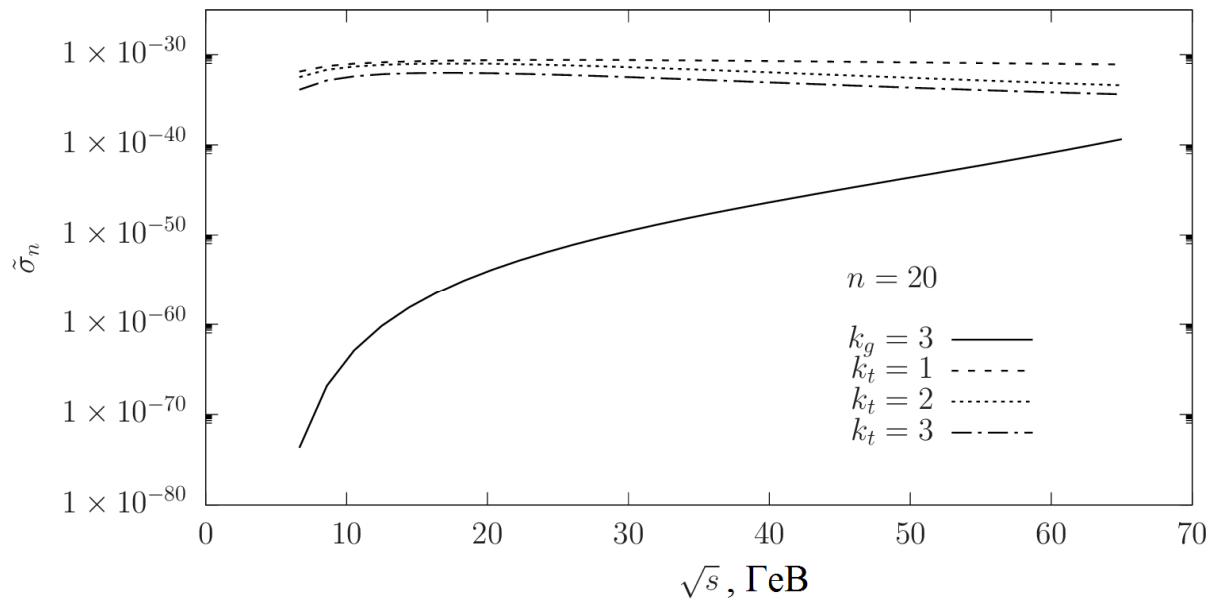


Рис. 4.13. Залежність внесків у парціальний переріз для діаграм виду «гребінка» (суцільна лінія) та деревних діаграм виду рис. 4.1 з одним, двома та трьома деревами (різні значення k_t) з утворенням $n = 20$ вторинних частинок.

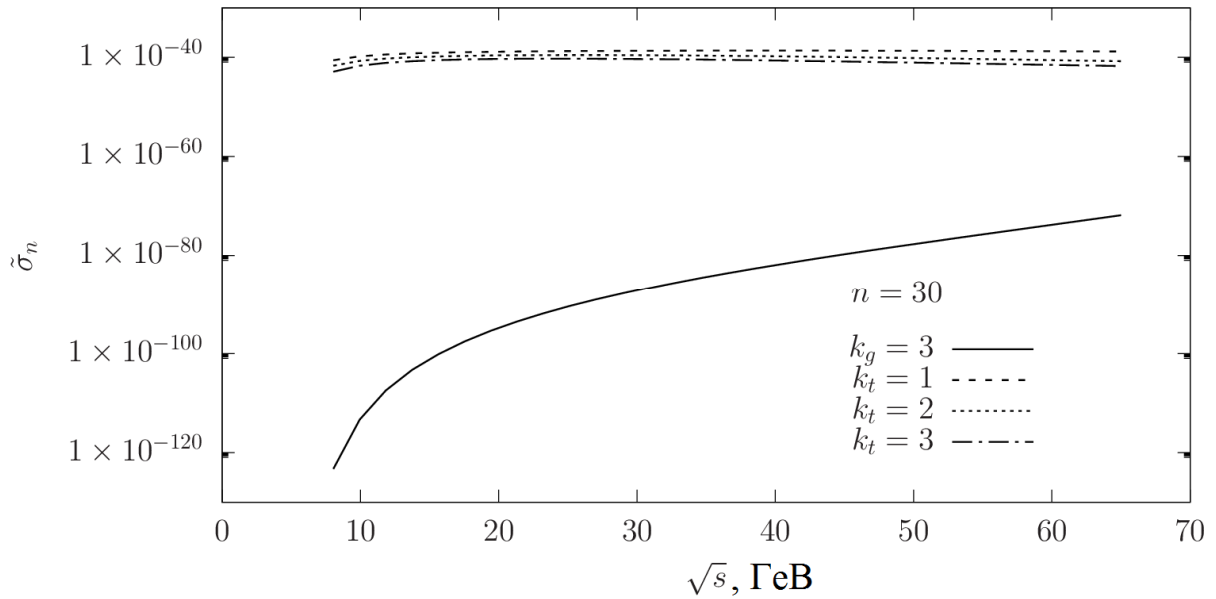


Рис. 4.14. Залежність внесків у парціальний переріз для діаграм виду «гребінка» (суцільна лінія) та деревних діаграм виду рис. 4.1 з одним, двома та трьома деревами (різні значення k_t) з утворенням $n = 30$ вторинних частинок.

Таким чином, отримані результати свідчать про необхідність врахування деревних діаграм виду рис. 4.1 при розрахунках перерізів та моделюванні процесів розсіяння. Крім того, як буде показано далі, при розгляді діаграм такого виду також виникає необхідність врахування інтерференційних внесків.

4.3. Необхідність врахування інтерференції між зливами і метод генерування подій з урахуванням цієї інтерференції

Як вже було показано вище, імпульси вторинних частинок, які приєднуються до одного дерева діаграми виду рис. 4.1, приймають однакові значення в точці максимуму виразу, що відповідає цій діаграмі. Із міркувань симетрії випливає, що для діаграми з одним вихідним деревом $k_t = 1$, усі імпульси вторинних частинок будуть дорівнювати нулю, аналогічно, як це було для діаграми з однією групою вершин $k_g = 1$. Зауважимо, що у випадку з

групами, така властивість точки максимуму функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ проявлялась вже після врахування перестановок вторинних частинок в середині груп, в той час як у випадку з деревами така властивість точки максимуму функції $B_n(\{p_a p_b\})$ проявляється ще до врахування інтерференції. В результаті чого для деревної діаграми з одним вихідним деревом будь-яка перестановка вторинних частинок не змінює точку максимуму функції. Тому при врахуванні інтерференційних внесків отримаємо суму великої кількості доданків, які приймають максимум в одній й тій самій точці.

Таким чином, відповідна функція $A_n(\sqrt{s}, X)$ (сума по всіх перестановках вторинних частинок в середині дерева, до якого вони приєднуються) для деревних діаграм завжди матиме єдину точку максимуму. Більш того, у випадку діаграм типу «гребінка» доданки, що утворювали суму $A_n(\sqrt{s}, X)$, хоч і мали *близькі* точки максимуму, але все ж відстань між точками максимуму цих доданків зростала з ростом енергії. Це призводило до того, що для фіксованих n і k_g з ростом енергії єдиний максимум функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ ставав менш чітким (зменшувались значення других похідних в точці максимуму) і функція починала набувати максимального значення в декількох точках. У випадку ж деревних діаграм, як вже було сказано, доданки суми $A_n(\sqrt{s}, X)$ матимуть єдину точку максимуму. Це призводить до того, що єдиний максимум функції $A_n(\sqrt{s}, X)$ не перетворюється у декілька окремих максимумів та не стає менш чітким внаслідок збільшення відстані між точками максимумів доданків суми $A_n(\sqrt{s}, X)$ з ростом енергії $\sqrt{s}$.

При цьому очікується, що з ростом енергії, максимумами функцій $A_n(\sqrt{s}, X)$ віддалятимуться один від одного, що призводитиме до того, що з ростом енергії інтерференційні внески, які відповідають перестановкам між різними деревами ставатимуть менш суттєвими. Усе це дозволяє ефективно

застосовувати запропонований метод врахування інтерференційних внесків та метод генерування подій, заснований на методі Лапласа.

Розглянемо результати розрахунків внесків у парціальні перерізи розсіювання від діаграм виду рис. 4.1 з урахуванням і без урахування інтерференційних внесків, що відповідають перестановкам між різними деревами.

Як видно на рис. 4.15, при значеннях енергій, близьких до порогової енергії непружного розсіювання, інтерференційні внески мають суттєвий вклад у парціальний переріз.

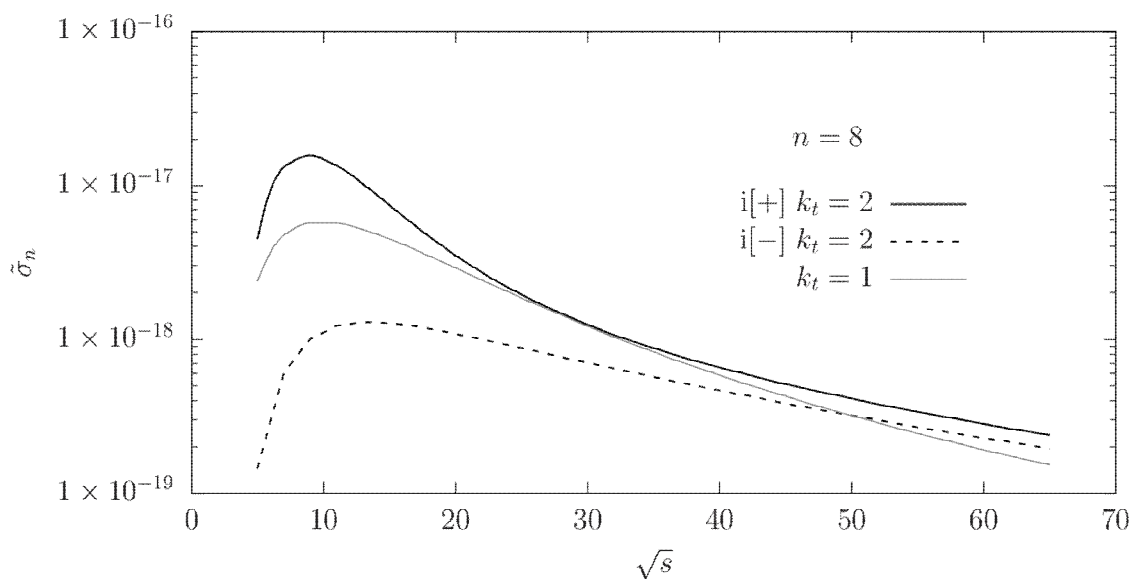


Рис. 4.15. Залежність внеску у парціальний переріз від діаграм виду рис. 4.1 з урахуванням ($i[+]$) та без урахування ($i[-]$) інтерференційних внесків, що відповідають перестановкам між різними деревами для $n = 8$.

Дійсно, для двох дерев, як і для двох груп у попередніх розділах, відстань між точками максимумів двох виразів $A_n(\sqrt{s}, X)$ і $A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$, де $\pi \notin [\varepsilon]$ зростає з ростом енергії. Це призводить до того, що добуток $A_n(\sqrt{s}, X)A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$ у підінтегральному виразі інтерференційного внеску, що відповідає перестановці π , зменшується на всій області інтегрування. Це добре видно на рисунку рис. 4.15 – суцільна та штрихова лінії зближаються з ростом енергії, що свідчить про те, що інтерференційні внески, що відпові-

дають перестановкам між різними деревами, поступово стають менш значними з ростом енергії. При цьому необхідність врахування усіх інтерференційних внесків очевидна – їх врахування призводить до зміни внеску у парціальні перерізи на порядки величини в усьому діапазоні енергій, в якому проводились розрахунки. Такі ж самі висновки можна зробити з результатів, наведених на рис. 4.16 - 4.17.

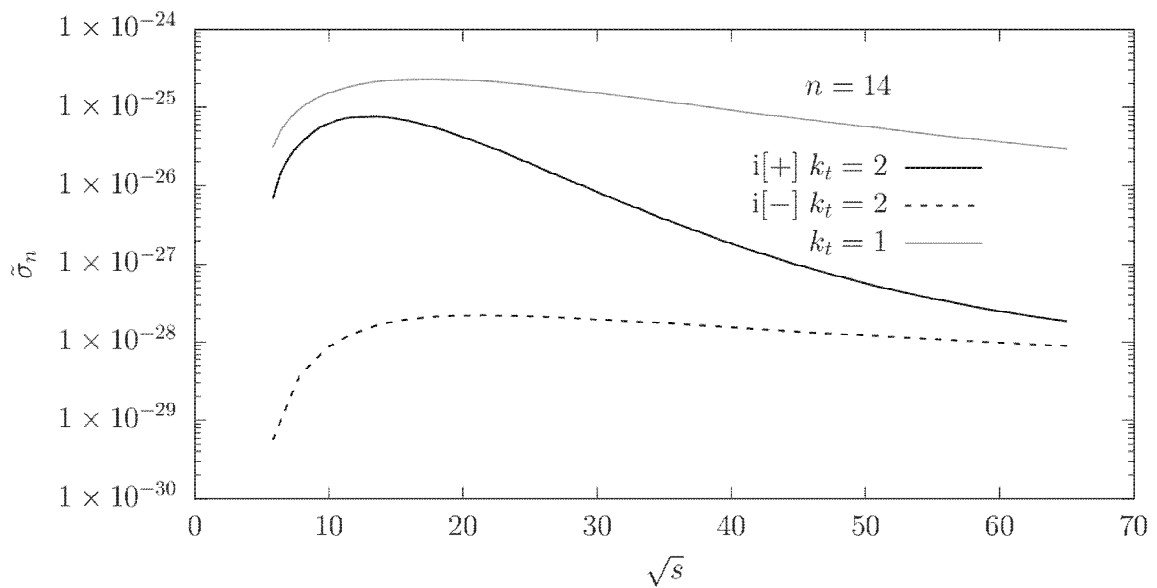


Рис. 4.16. Залежність внеску у парціальний переріз від діаграм виду рис. 4.1 з урахуванням ($i[+]$) та без урахування ($i[-]$) інтерференційних внесків, що відповідають перестановкам між різними деревами для $n = 14$.

Усі результати, отримані в цьому розділі, свідчать про те, що діаграми виду рис. 4.1 можуть легко бути враховані при генеруванні подій запропонованим у попередньому розділі методом.

Важливим моментом при цьому є те, що наближення, яке в попередньому розділі стосувалось властивостей точок максимумів функції $|T_n(\sqrt{s}, X)|^2$ для діаграм типу «гребінка», ще краще працює у випадку деревних діаграм.

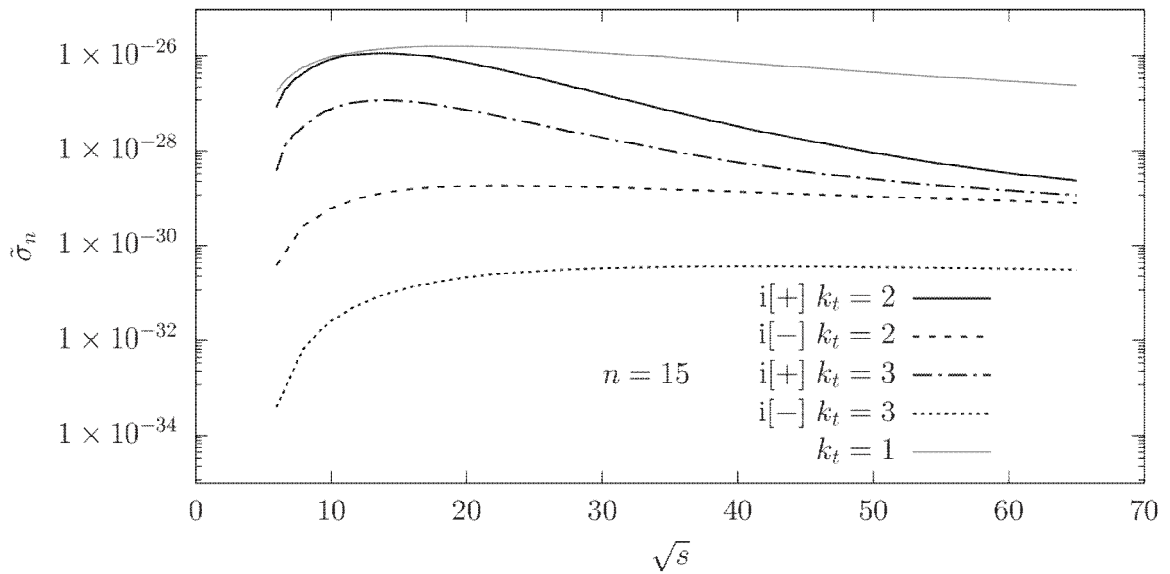


Рис. 4.17. Залежність внеску у парціальний переріз від діаграм виду рис. 4.1 з урахуванням ($i[+]$) та без урахування ($i[-]$) інтерференційних внесків, що відповідають перестановкам між різними деревами для $n = 15$.

Як вже було відмічено, це пов'язано з тим, що сума по перестановкам вторинних частинок в середині дерев $A_n(\sqrt{s}, X)$ має єдину точку максимуму незалежно від значення енергії. При цьому з ростом енергії цей максимум не стає менш *різким* (формально – не зменшуються власні значення матриці других похідних) внаслідок віддалення точок максимумі доданків суми $A_n(\sqrt{s}, X)$. Враховуючи, що з ростом енергії максимумами двох доданків $A_n(\sqrt{s}, X)$ і $A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$ у сумі для $T_n(\sqrt{s}, X)$ віддаляються все більше, то кожен окремий максимум функції $T_n(\sqrt{s}, X)$ все краще апроксимується відповідною функцією $A_n(\sqrt{s}, \hat{\pi}X)$.

Таким чином, запропонований метод генерування подій з урахуванням інтерференції між деревами може бути застосовано без змін в тому вигляді, в якому його описано у попередньому розділі.

4.4. Висновки до розділу 4.

Показано, що сума всіх можливих деревних діаграм з однією вхідною лінією і довільною кількістю вихідних ліній досягає максимального значення за однакових значень чотириімпульсів вихідних частинок. Це дозволяє застосувати метод Лапласа для генерування партонних або адронних злив методом матричних елементів для великої кількості злив і великої кількості вторинних частинок в кожній зливі.

Ще одним наслідком цього результату є те, що при підсумуванні по всіх перестановках частинок в зливі константа зв'язку буде факторіально підсилюватися, на противагу підсиленню ступенями великих логарифмів в моделі ДГЛАП. Окрім того, те, що частинки в зливі з найбільшою ймовірністю народжуються в одному й тому ж квантовому стані, виявляє новий механізм когерентного випромінювання.

Показано, що для процесів із декількома зливами внески в перерізи, пов'язані із перестановками частинок між різними зливами, є суттєвими й ними неможна нехтувати.

Оскільки, як й у груп частинок, розглянутих в попередніх розділах, так й у зливах максимум амплітуди розсіяння досягається при однакових значеннях чотириімпульсів, для діаграм з утворенням злив можна скористатися тими ж методами врахування інтерференції між зливами і Монте-Карло генерування подій методом матричних елементів, що були описані раніше.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено новий метод врахування інтерференційних внесків в перерізи непружного розсіяння, який передбачає застосування методу Лапласа в межах мультипериферійної моделі для розрахунку суми внесків із близькими точками максимуму, а не для розрахунку кожного внеску.

Цей метод дозволив провести розрахунки перерізів для кінцевих станів, що містять до 50 тотожних частинок. Це суттєво відрізняється від існуючих результатів, де інтерференційні внески або не враховувалися взагалі (феноменологічні, гідродинамічні, статистичні моделі), або враховувалися лише прямим підсумуванням, що дозволяло провести розрахунки лише до 8 частинок в кінцевому стані.

На основі методу розраховано інклюзивний переріз по бистротах вторинних частинок. На рівні якісного збігу результат відтворює зміну характеру залежності інклюзивного перерізу від бистроти із зростанням енергії зіткнення протонів. Це дозволило вперше пояснити цю зміну саме як інтерференційний ефект.

Розроблені алгоритми реалізовані в виді програмного коду, який може також застосовуватися для аналогічних розрахунків в межах теорії збурень КХД та інших калібрувальних моделей.

2. Розроблено новий метод генерації непружних подій із застосуванням мультипериферійної моделі, оснований на методі Лапласа, який дозволяє значно спростити алгоритм генерації у порівнянні з існуючими (RAMBO, SARGE) з урахуванням закону збереження енергії-імпульсу та умов масової поверхні.

Для модифікації методу генерування застосовано метод підсумування інтерференційних внесків для врахування цих внесків при генерації непружних подій. Розроблено і реалізовано двоетапний алгоритм генерації, що є алгоритмічним способом врахування інтерференційних внесків та інтерференційних ефектів. В більшості існуючих Монте-Карло генераторах подій інтер-

ференційні внески не враховуються взагалі (як, наприклад, в PYTHIA), або враховуються лише для невеликих кількостей частинок в кінцевому стані, коли матричний елемент може бути явно розрахований і таким чином введений в комп'ютерну програму (HELAS, SPHEL).

Отримані в дисертації результати дозволили застосувати метод матричних елементів для генерації подій з такими кількостями частинок в кінцевому стані (до 50), які раніше генерувалися лише методом злив. На основі обробки результатів генерації з використанням двоетапного алгоритму, незалежно від чисельного розрахунку вдалося відтворити зміну характеру залежності інклюзивного перерізу по швидкості із зростанням енергії зіткнення вихідних протонів.

Розроблені алгоритми і програмні коди можуть бути використані як підпрограми в майбутніх генераторах подій та інтеграторах перерізів.

3. Показано, що для аналітичного виразу суми всіх безпетльових діаграм із однією вхідною лінією і довільною кількістю вихідних ліній максимум величини досягається при однакових значеннях чотиріімпульсів вихідних частинок. Це дозволяє використовувати такі діаграми для моделювання партонних та адронних злив, використовуючи при цьому метод матричних елементів.

Таким чином, при підсумуванні по всіх перестановках частинок однієї зливи виникає факторіальне підсилення константи зв'язку на відміну від підсилення ступенями великого логарифму в наближенні ДГЛАП. Це призводить до того, що суттєвий внесок в перерізи розсіювання вносить інша ніж в ДГЛАП область фазового простору. Факторіальне підсилення області однакових чотиріімпульсів призводить до нового механізму когерентності випромінювання частинок в зливах, який може бути використаний для побудови лазерів на іншому принципі ніж існуючі.

Отримані результати дозволяють застосувати метод матричних елементів для генерації багаточастинкових злив (партонних або адронних в залежності від моделі). При цьому результат врахування суми по перестановках

частинок всередині однієї зливи суттєво відрізняється від того, який прийнятий в моделях когерентних партонних злив, де таке підсумування призводить до того, що кожний наступний партон випромінюється найімовірніше під меншим кутом до вісі зливи. Внаслідок того, що максимум модуля деревної амплітуди досягається при однакових чотириімпульсах і ця область фазового простору факторіально підсилюється при врахуванні перестановок частинок всередині дерева, в нашій моделі всі частинки зливи випромінюються із максимальною ймовірністю уздовж його вісі.

4. Вперше показано, що при розгляді діаграм з утворенням декількох злив суттєву роль грають внески в перерізи, пов'язані з інтерференцією між різними зливами. В існуючих теоретичних моделях і Монте-Карло генераторах така інтерференція не враховується, що пов'язано з припущенням про домінування області сильного впорядкування по поперечних до вісі зіткнення, характерним для моделі ДГЛАП.

5. Розроблені методи врахування інтерференційних внесків і генерації подій можуть бути застосовані для діаграм з утворенням декількох злив. Це дає змогу генерувати партонні та адронні зливи з великою кількістю частинок у зливі і великою кількістю злив методом матричних елементів, користуючись розробленими методами інтерференцію між зливами. При цьому, оскільки перестановка частинок в зливі не змінює точку максимуму, тоді як перестановка частинок на «гребінці» хоч і мало, але зміщує точку максимуму, точність цих методів при застосуванні до розрахунків і генерації злив буде вищою, ніж при застосуванні мультипериферійних діаграм.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] M. Baker and K. A. Ter-Martirosyan, Gribov's reggeon calculus: Its physical basis and implications, *Physics Reports*, **28**(1), 1 (1976).
- [2] Л. Н. Липатов, Бьёркеновская и реджевская асимптотики амплитуд рассеяния в квантовой хромодинамике и суперсимметричных калибровочных моделях, *Усп. физ. Наук* **178**(6), 663 (2008).
- [3] Кураев Э.А., Липатов Л.Н., Фадин В.С., Мультиреджевские процессы в теории Янга-Миллса, *ЖЭТФ* **71**, 840 (1976).
- [4] Козлов М.Г., Резниченко А.В., Фадин В.С., Квантовая хромодинамика при высоких энергиях, *Вестник НГУ. Серия: Физика* **2**(4), 3 (2007).
- [5] Claude Duhr and Zhengwen Liu, Multi-regge kinematics and the scattering equations, *Journal of High Energy Physics* **2019**(1), 146 (2019).
- [6] I.V. Sharf and V.D. Rusov, Mechanisms of proton-proton inelastic cross-section growth in multi-peripheral model within the framework of perturbation theory. Part 1, *J. Mod. Phys.* **2**, 1480 (2011).
- [7] I.V. Sharf, A.J. Haj Farajallah Dabbagh, A.V. Tikhonov, and V.D. Rusov, Mechanisms of proton-proton inelastic cross-section growth in multi-peripheral model within the framework of perturbation theory. Part 2, *J. Mod. Phys.* **3**, 16 (2012).
- [8] I.V. Sharf et al., Mechanisms of proton-proton inelastic cross-section growth in multi-peripheral model within the framework of perturbation theory. Part 3, *J. Mod. Phys.* **3**, 129 (2012).
- [9] I. V. Sharf et al., Description of hadron inelastic scattering by the Laplace method and new mechanisms of cross-section growth, *Ukr. J. Phys.* **56**, 1151 (2011).
- [10] Igor Sharph et al., On the Role of Longitudinal Momenta in High Energy Hadron-Hadron Scattering, *Central Eur. J. Phys.* **10**, 858 (2012).

- [11] I.V Sharf et al., On equivalence of gluon-loop exchange in the inelastic processes in perturbative QCD to pion exchange in ϕ^3 theory, EPJ Web of Conferences **60**, 20018 (2013).
- [12] Mats Bengtsson and Torbjörn Sjöstrand, Coherent parton showers versus matrix elements - implications of PETRA – PEP data, Physics Letters B **185**(3), 435 (1987).
- [13] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, Deep inelastic ep scattering in perturbation theory, Sov. J. Nucl. Phys. **15**, 438 (1972). [Yad. Fiz. **15**, 781 (1972)].
- [14] Yuri L. Dokshitzer, Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and $e^+ e^-$ Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics, Sov. Phys. JETP **46**, 641 (1977). [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **73**, 1216 (1977)].
- [15] Guido Altarelli and G. Parisi, Asymptotic Freedom in Parton Language, Nucl. Phys. B **126**, 298 (1977).
- [16] N. G. de Bruijn, Asymptotic methods in analysis (Dover Publications, 2010).
- [17] D. Amati, A. Stanghellini, and S. Fubini, Theory of high-energy scattering and multiple production, Il Nuovo Cimento (1955-1965) **26**(5), 896 (1962).
- [18] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and Victor S. Fadin, The Pomeron singularity in Nonabelian Gauge Theories, Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977). [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72**, 377(1977)].
- [19] V.S. Fadin, E.A. Kuraev, and L.N. Lipatov, On the pomeron singularity in asymptotically free theories, Physics Letters B **60**(1), 50 (1975).
- [20] V.A. Abramovsky, V.N. Gribov, and O.V. Kancheli, Character of Inclusive Spectra and Fluctuations Produced in Inelastic Processes by Multi-Pomeron Exchange, Yad. Fiz. **18**, 595 (1973).
- [21] Klaus Werner, Fu-Ming Liu, and Tanguy Pierog, Parton ladder splitting and the rapidity dependence of transverse momentum spectra in deuteron-gold collisions at RHIC, Phys. Rev. C **74**, 044902 (2006).
- [22] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Review of Particle Physics, Chin. Phys. C **40**(10), 100001 (2016).

- [23] W-M Yao et al. (Particle Data Group), J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **33**, 1 (2006).
- [24] J. R. Cudell et al. (COMPETE Collaboration), Hadronic scattering amplitudes: Medium-energy constraints on asymptotic behavior, Phys. Rev. D **65**, 074024 (2002).
- [25] J.R. Cudell et al. (COMPETE Collaboration), Benchmarks for the forward observables at RHIC, the Tevatron Run II and the LHC, Phys. Rev. Lett. **89**, 201801 (2002).
- [26] P. D. B. Collins, An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1977).
- [27] Torbjörn Sjöstrand, Stephen Mrenna, and Peter Skands, PYTHIA 6.4 physics and manual, Journal of High Energy Physics **2006**(05), 026 (2006).
- [28] Torbjörn Sjöstrand et al., An introduction to PYTHIA 8.2., Computer Physics Communications **191**, 159 (2015).
- [29] Robert Ciesielski and Konstantin Goulianos, MBR Monte Carlo Simulation in PYTHIA8, in *Proceedings of 36th International Conference on High Energy Physics*, PoS ICHEP2012, 301 (2013).
- [30] A. Donnachie and P.V. Landshoff, Total cross sections, Physics Letters B **296**(1), 227 (1992).
- [31] Gerhard A. Schuler and Torbjörn Sjöstrand, Hadronic diffractive cross sections and the rise of the total cross section. Phys. Rev. D **49**, 2257 (1994).
- [32] Christine O. Rasmussen and Torbjörn Sjöstrand, Models for total, elastic and diffractive cross sections, Eur. Phys. J. C **78**(6), 461 (2018).
- [33] V. N. Gribov, A reggeon diagram technique, Sov. Phys. JETP **26**, 414 (1968). [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53**, 654 (1967)].
- [34] V. N. Gribov, The theory of complex angular momenta: Gribov lectures on theoretical physics (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2007).

- [35] Marcel Froissart, Asymptotic behavior and subtractions in the mandelstam representation, *Phys. Rev.* **123**, 1053 (1961).
- [36] M. A. Dobbs et al., Les Houches guidebook to Monte Carlo generators for hadron collider physics, in *3rd Les Houches Workshop on Physics at TeV Colliders* (2004), 411.
- [37] Sergey Ostapchenko, Status of QGSJET, *AIP Conf. Proc.* **928**(1), 118 (2007).
- [38] N. N. Kalmykov, S.S. Ostapchenko, and A.I. Pavlov, Quark-gluon-string model and eas simulation problems at ultra-high energies. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **52**(3), 17 (1997).
- [39] A.B. Kaidalov and K.A. Ter-Martirosyan, Pomeron as quark-gluon strings and multiple hadron production at sps-collider energies, *Physics Letters B* **117**(3), 247 (1982).
- [40] A. Capella et al., Dual parton model, *Physics Reports* **236**(4), 225 (1994).
- [41] B. Andersson, G. Gustafson, G. Ingelman, and T. Sjöstrand, Parton fragmentation and string dynamics, *Physics Reports* **97**(2), 31 (1983).
- [42] Dale R. Snider and Don M. Tow, Inclusion of interference terms in the Amati-Bertocchi-Fubini-Stanghellini-Tonin multiperipheral model, *Phys. Rev. D* **3**, 996 (1971).
- [43] Don M. Tow, Some predictions of the Amati-Bertocchi-Fubini-Stanghellini-Tonin multiperipheral model, *Phys. Rev. D* **2**, 154 (1970).
- [44] Gerson Goldhaber, William B. Fowler, Sulamith Goldhaber, and T. F. Hoang, Pion-pion correlations in antiproton annihilation events, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 181 (1959).
- [45] V. Khachatryan et al. (CMS Collaboration), First measurement of bose-einstein correlations in proton-proton collisions at $\sqrt{s}=0.9$ and 2.36 TeV at the LHC, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 032001 (2010).
- [46] CMS Collaboration, Bose-Einstein Correlations of charged hadrons in proton-proton collisions at $\sqrt{s}=13$ TeV, *J. High Energ. Phys.* **2020**, 14 (2020).

- [47] Bengt Lörstad, Boson interferometry: A review of high energy data and its interpretation, *International Journal of Modern Physics A* **04**(12), 2861 (1989).
- [48] Gideon Alexander, Bose-Einstein and Fermi-Dirac interferometry in particle physics, *Reports on Progress in Physics* **66**(4), 481 (2003).
- [49] V. A. Schegelsky, Levy analysis of Bose–Einstein correlation in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV measured with the ATLAS, *Physics of Particles and Nuclei Letters* **16**(5), 503 (2019).
- [50] V. A. Khoze, A. D. Martin, M. G. Ryskin, and V. A. Schegelsky, Two scales in Bose–Einstein correlations, *The European Physical Journal C* **76**(4), 193 (2016).
- [51] T. Csörgő and S. Hegyi, Model independent shape analysis of correlations in 1, 2 or 3 dimensions, *Physics Letters B* **489**(1), 15 (2000).
- [52] Gerson Goldhaber, Sulamith Goldhaber, Won-Yong Lee, and Abraham Pais, Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process, *Phys. Rev.* **120**, 300 (1960).
- [53] M. Gyulassy, S. K. Kauffmann, and Lance W. Wilson, Pion interferometry of nuclear collisions. I. Theory, *Phys. Rev. C* **20**, 2267 (1979).
- [54] William A. Zajc, Monte Carlo calculational methods for the generation of events with Bose-Einstein correlations, *Phys. Rev. D* **35**, 3396 (1987).
- [55] R. M. Weiner, Boson interferometry in high-energy physics, *Phys. Rept.* **327**, 249 (2000).
- [56] Urs Achim Wiedemann and Ulrich Heinz, Particle interferometry for relativistic heavy-ion collisions, *Physics Reports* **319**(4), 145 (1999).
- [57] G. A. Kozlov, O. V. Utyuzh, and G. Wilk, Bose-Einstein correlation function $C_2(q)$ from a quantum field theory point of view, *Phys. Rev. C* **68**, 024901 (2003).
- [58] Oleg Utyuzh, Grzegorz Wilk, and Zbigniew Włodarczyk, Modelling Bose-Einstein Correlations via Elementary Emitting Cells, *Phys. Rev. D* **75**, 074030 (2007).

- [59] G. A. Kozlov, The Bose-Einstein distribution functions and the multi-particle production at high energies, *New Journal of Physics* **4**, 23 (2002).
- [60] Scott Pratt and Vladimir Zelevinsky, Explaining Centauro events by formation of pions in the isospin singlet channel, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 816 (1994).
- [61] Scott Pratt, Deciphering the Centauro puzzle, *Phys. Rev. C* **50**, 469 (1994).
- [62] Scott Pratt, Pion lasers from high-energy collisions, *Physics Letters B* **301**(2), 159 (1993).
- [63] Tolga Altinoluk et al., Hanbury–Brown–Twiss measurements at large rapidity separations, or can we measure the proton radius in p-A collisions, *Physics Letters B* **752**, 113 (2016).
- [64] E. Gotsman, E. Levin, and U. Maor, Bose-Einstein correlations and v_{2n} and v_{2n-1} in hadron and nucleus collisions, *Phys. Rev. D* **95**, 034005 (2017).
- [65] E. C. G. Sudarshan, John R. Klauder, *Fundamentals of quantum optics* (Dover Publications, 2006).
- [66] D. J. Scalapino and R. L. Sugar, A statistical theory of particle production, *Phys. Rev. D* **8**, 2284 (1973).
- [67] J. C. Botke, D. J. Scalapino, and R. L. Sugar, Coherent states and particle production, *Phys. Rev. D* **9**, 813 (1974).
- [68] G.N. Fowler, N. Stelte, and R.M. Weiner, Condensates and Bose-Einstein correlations, *Nuclear Physics A* **319**(3), 349 (1979).
- [69] A. Vourdas and R. M. Weiner, Multiplicity distributions and Bose-Einstein correlations in high-energy multiparticle production in the presence of squeezed coherent states, *Phys. Rev. D* **38**, 2209 (1988).
- [70] Edmond L. Berger, B. Y. Oh, and G. A. Smith, Two-particle correlations in inclusive pp interactions between 13 and 28 GeV/c, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 675 (1972).
- [71] A.I. Golokhvastov, Scaling of semi-inclusive spectra of π^- mesons from pp interactions, *Zeitschrift für Physik C* **26**, 469 (1984).
- [72] W. Thome et al., Charged Particle Multiplicity Distributions in p p Collisions at ISR Energies, *Nucl. Phys. B* **129**, 365 (1977).

- [73] A. Breakstone et al. (Ames-Bologna-CERN-Dortmund-Heidelberg-Warsaw Collaboration), Comparison of inclusive distributions in pp and pp interactions at $\sqrt{s}=53$ GeV. *Physics Letters B* **132**(4), 458 (1983).
- [74] G. Giacomelli, Inclusive and semi-inclusive hadron interactions at ISR and collider energies, *Int. J. Mod. Phys. A* **05**(02), 223 (1990).
- [75] G. J. Alner et al., Scaling of pseudorapidity distributions at c.m. energies up to 0.9 TeV, *Z. Phys. C* **33**, 1 (1986).
- [76] M. Tanabashi and Hagiwara et al., Review of particle physics, *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018).
- [77] A. B. Kaidalov and K. A. Ter-Martirosian, Multiple production of hadrons at high energies in the model of quark-gluon strings, *Sov. J. Nucl. Phys.* **39**, 979 (1984). [*Yad. Fiz.* **39**, 1545 (1984)].
- [78] B. Kaidalov and K. A. Ter-Martirosyan, Multihadron production at high energies in the model of quark gluon strings. *Sov. J. Nucl. Phys.* **40**, 135 (1984). [*Yad. Fiz.* **40**, 211(1984)].
- [79] Grzegorz Wilk, Fluctuations, correlations and non-extensivity, *Brazilian Journal of Physics* **37**, 714 (2007).
- [80] F.S. Navarra, O.V. Utyuzh, G. Wilk, and Z. Wlodarczyk, Information theory in high-energy physics (extensive and nonextensive approach), *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **344**(3), 568 (2004).
- [81] G. Wolschin, Pseudorapidity distributions of produced charged hadrons in pp collisions at RHIC and LHC energies, *EPL* **95**(6), 61001 (2011).
- [82] K. Werner et al., Evidence for hydrodynamic evolution in proton-proton scattering at 900 GeV, *Phys. Rev. C* **83**, 044915 (2011).
- [83] A. K. Likhoded, A. V. Luchinsky, and A. A. Novoselov, Inclusive light hadron production in pp scattering at the LHC, *Phys. Rev. D* **82**, 114006 (2010).
- [84] Ajay Kumar Dash and Bedangadas Mohanty, Extrapolation of multiplicity distribution in pp(bar p) collisions to LHC energies, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **37**(2), 025102 (2010).

- [85] Zhi-Jin Jiang, Hai-Li Zhang, Ke Ma, and Jie Wang, A description of pseudorapidity distributions in p-p collisions at center-of-mass energy from 23.6 to 900 GeV, *Chinese Physics C* **39**(4), 044102 (2015).
- [86] I.V. Sharf et al., Gluon Loops in the Inelastic Processes in QCD, arXiv:1210.3490 (2012).
- [87] O. Potiienko et al., New method of accounting for interference contributions within a multiperipheral model, *Phys. Rev. D* **101**, 076021 (2020).
- [88] J. André and T. Sjöstrand, Matching of matrix elements and parton showers, *Phys. Rev. D* **57**, 5767 (1998).
- [89] K. Hagiwara et al., Fast calculation of HELAS amplitudes using graphics processing unit (GPU), *Eur. Phys. J. C* **66**, 477 (2010).
- [90] R. Kleiss, W. James Stirling, and S. D. Ellis, A new Monte Carlo treatment of multiparticle phase space at high-energies, *Comput. Phys. Commun.* **40**, 359 (1986).
- [91] A. van Hameren and R. Kleiss, Generating qcd antennas, *Eur. Phys. J. C* **17**(4), 611 (2000).
- [92] Ronald Kleiss, *Phase space Monte Carlo* (Springer Netherlands, Dordrecht, 2000), 281.
- [93] André van Hameren, Ronald Kleiss and Petros D. Draggiotis, Draggiotis, Sarge: An algorithm for generating qcd-antennas, *Physics Letters B* **483**(1), 124 (2000).
- [94] Ronald Kleiss and W. James Stirling, Massive multiplicities and Monte Carlo, *Nuclear Physics B* **385**(1), 413 (1992).
- [95] A.F.W. van Hameren, Ph.D. thesis, University of Nijmegen, 2001.
- [96] A.F.W. van Hameren and Ronald Kleiss, A fast algorithm for generating a uniform distribution inside a high-dimensional polytope, *Computer Physics Communications* **133**(1), 1 (2000).
- [97] Ronald Kleiss, Monte Carlo exponentiation and final-state radiative corrections, *Nuclear Physics B* **376**(1), 145 (1992).

- [98] Ronald Kleiss, Phase Space Monte Carlo, NATO Sci. Ser. C **554**, 281 (2000).
- [99] John Hilgart, Ronald Kleiss, and Francois [Le Diberder], An electroweak Monte Carlo for four-fermion production, Computer Physics Communications **75**(1), 191 (1993).
- [100] Frank Krauss, Ralf Kuhn, and Gerhard Soff, AMEGIC 1.0, A Matrix Element Generator In C++, Journal of High Energy Physics **2002**(02), 044 (2002).
- [101] R. Kleiss and W.James Stirling, Cross-sections for the production of an arbitrary number of photons in electron-positron annihilation, Phys. Lett. B **179**, 159 (1986).
- [102] Ahmed Ali et al., QCD Predictions for four jet final states in $e^+ e^-$ annihilation, Nucl. Phys. B **167**, 454 (1980).
- [103] Stephen J. Parke and T.R. Taylor, An amplitude for n gluon scattering, Phys. Rev. Lett. **56**, 2459 (1986).
- [104] F.A. Berends, W.T. Giele, and H. Kuijf, Exact and approximate expressions for multigluon scattering, Nuclear Physics B **333**(1), 120 (1990).
- [105] F.A. Berends and H. Kuijf, Jets at the LHC, Nuclear Physics B **353**(1), 59 (1991).
- [106] D.A. Ptashynskiy et al., Multiparticle fields on the subset of simultaneity, Ukr. J. Phys. **64**(8), 732 (2019).
- [107] Brian D. Serot and John Dirk Walecka, Recent progress in quantum hadrodynamics, Int. J. Mod. Phys. E **6**, 515 (1997).
- [108] H. Leutwyler, On the foundations of chiral perturbation theory, Annals Phys. **235**, 165 (1994).
- [109] Aneesh V. Manohar, Introduction to effective field theories, in *Les Houches summer school: EFT in Particle Physics and Cosmology*, 4 (2018).
- [110] Yuri L. Dokshitzer, Dmitri Diakonov, and S.I. Troian, Hard Processes in Quantum Chromodynamics, Phys. Rept. **58**, 269 (1980).
- [111] K. Konishi, A. Ukawa, and G. Veneziano, Jet Calculus: A simple algorithm for resolving QCD jets, Nucl. Phys. B **157**, 45 (1979).

- [112] A.H. Mueller, On the multiplicity of hadrons in QCD jets, Phys. Lett. B **104**, 161 (1981).
- [113] A.H. Mueller, Multiplicity and hadron distributions in QCD jets: Non-leading terms, Nuclear Physics B **213**(1), 85 (1983).
- [114] A. Bassetto, M. Ciafaloni, G. Marchesini, and Alfred H. Mueller, Jet multiplicity and soft gluon factorization, Nucl. Phys. B **207**, 189 (1982).
- [115] G. Marchesini and B. R. Webber, Simulation of QCD jets including soft gluon interference, Nucl. Phys. B **238**, 1 (1984).
- [116] M. Bengtsson and T. Sjostrand, Coherent Parton Showers Versus Matrix Elements: Implications of PETRA - PEP data, Phys. Lett. B **185**, 435 (1987).
- [117] R. Kuhn, F. Krauss, B. Iványi and G. Soff, APACIC++ 1.0 A PArton Cascade In C++, Computer Physics Communications **134**(2), 223 (2001).
- [118] F. Caravaglios and M. Moretti, An algorithm to compute born scattering amplitudes without Feynman graphs, Physics Letters B **358**(3), 332 (1995).
- [119] Petros Draggiotis, Ronald H.P. Kleiss, and Costas G. Papadopoulos, On the computation of multigluon amplitudes, Phys. Lett. B **439**, 157 (1998).
- [120] S. Sharma and M. Kaur, Multiplicity spectra in pp collisions at high energies in terms of Gamma and Tsallis distributions, Phys. Rev. D **98**(3), 034008 (2018).
- [121] S. Acharya et al., Charged-particle multiplicity distributions over a wide pseudorapidity range in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 0.9, 7$, and 8 TeV, Eur. Phys. J. C **77**(12), 852 (2017).
- [122] V. Khachatryan et al. (CMS Collaboration), Charged particle multiplicities in pp interactions at $\sqrt{s}=0.9, 2.36$, and 7 TeV, JHEP **2011**, 79 (2011).
- [123] Меркотан К.К. та ін., Багаточастинкові поля і механізм Хіггса, Журн. фіз. досл. **22**(3), 3001 (2018).
- [124] N. Chudak et al., Multi-Particle Quantum Fields, Physics Journal **2**(3), 181 (2016).
- [125] Д.А. Пташинський Н.О та ін., Багаточастинкові польові оператори в квантовій теорії поля, *Тези доповідей Міжнародної конференції студентів і*

молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (Еврика-2018), (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018), Е4.

[126] N. Chudak et al., The calculation of the differential cross section of hadron elastic scattering by transferred four-momentum within the perturbation theory, J Phys Stud **23**(1), 1101 (2019).

[127] K. A. Olive et al. (Particle Data Group), Review of Particle Physics, Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).

[128] The NA49 Collaboration, Inclusive production of charged pions in p+p collisions at 158 GeV/c beam momentum, Eur. Phys. J. C **45**(2), 343 (2006).

[129] O. Potienko, I. Sharf, The new method of interference contributions accounting for inelastic scattering diagrams, in *Abstracts of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School "Diffractive and electromagnetic processes at high energies"* (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2015).

[130] І.В. Шарф та ін., Новий метод врахування інтерференційних внесків для діаграм непружного розсіяння, *Матеріали міжнародної конференції молодих учених і аспірантів*, (Берега А.Е., Ужгород, 2015), 207.

[131] Н.О. Чудак та ін., Розрахунок диференціального перерізу пружного розсіяння адронів за переданим чотириімпульсом в межах теорії збурень, *Тези доповідей Міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (Еврика-2018)*, (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018), Е6.

[132] Ю.Волкотруб та ін., Метод Лапласа для Монте-Карло-генераторів процесів розсіяння, Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика **38**, 96 (2015).

[133] O. S. Potienko, A new method for Monte-Carlo event generators of the scattering processes, in *Abstracts of 18-th Odessa International Astronomical Gamov Conference-School "Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology,*

Cosmomicrophysics, Astroparticle Physics, Radioastronomy and Astrobiology” (Odessa, 2018), 14.

[134] N. Chudak, D. Ptashynskiy, A. Potienko, Multi-particle field operators as a method for hadron scattering description, in *Abstracts of Posters of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “QCD - Old Challenges and New Opportunities”* (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2017).

[135] Dmytro Ptashynskiy, Nataliia Chudak, Oleksii Potiienko, Kyrylo Merkotan, Multi-particle fields as a method for hadron’s description, in *Book of Abstracts of 8th International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics* (IWARA2018, Ollantaytambo, 2018), 35.

[136] Чудак Н.О. та ін., Внутрішні стани адронів в релятивістських системах відліку, Укр. фіз. Жур. **61**(12), 1033 (2016).

[137] Шарф, І.В та ін., Метод Лапласа для опису непружного розсіяння адронів і нові механізми зростання перерізів, Укр. фіз. журн. **56**(11), 1151 (2011).

[138] H. Rutishauser, The Jacobi method for real symmetric matrices, *Numerische Mathematik* **9**(1), 1 (1966).

[139] H Murayama, I Watanabe, and K Hagiwara, HELAS: HELicity amplitude subroutines for Feynman diagram evaluations, National Laboratory for High Energy Physics (Tsukuba) KEK Report 91-11, 1992.

[140] T. Stelzer and W.F. Long, Automatic generation of tree level helicity amplitudes, *Computer Physics Communications* **81**(3), 357 (1994).

[141] G. Hanson et al., Evidence for jet structure in hadron production by e^+e^- annihilation. *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1609 (1975).

[142] K.K. Merkotan et al., A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, *East Eur. J. Phys.* **5**(2), 35 (2018).

[143] K.K. Merkotan et al., An alternative method of an electromagnetic field introduction into a Standard Model, in *Proceedings of International Conference of Young Scientists “Problems of Physics and Astronomy”*, edited by A.M. Maharramov (Baku University Publishing House, Baku, 2017), 82.

- [144] Ptashynskyi Dmytro, Chudak Nataliia, Merkotan Kyrylo, Potiienko Oleksii, A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, in Proceedings of the Thirteenth Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics (CIPANP 2018), edited by Wick Haxton, eConf C180529, 91, (2018).

ДОДАТОК

Список публікацій здобувача

Основні результати дисертаційної роботи викладено в 18 публікаціях, 6 з яких індексуються в наукометричній базі Scopus, у тому числі в 8 статтях у наукових фахових виданнях України та інших держав (1 статтю опубліковано у виданні, віднесеному до першого квартилю (Q 1) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank), 2 статтях у збірниках наукових праць міжнародних конференцій і додатково висвітлено в 8 тезах доповідей на міжнародних конференціях.

1. O. Potiienko, K. Merkotan, N. Chudak, D. Ptashynskiy, T. Zelentsova, T. Yushkevich, I. Sharph, and V. Rusov, New method of accounting for interference contributions within a multiperipheral model, *Physical Review D* 101, 7 (2020).

<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.101.076021>

2. Чудак Н.О., Меркотан К.К., Пташинський Д.А., Потієнко О.С., Делієргієв М.А., Тихонов А.В., Сохранний Г.О., Жарова О.В., Березовський О.Д., Войтенко В.В., Волкотруб Ю.В., Шарф І.В., Русов В.Д., Внутрішні стани адронів в релятивістських системах відліку, *Укр. фіз. жур.* 61(12), 1033 (2016).

<https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019004>

3. Чудак Н.О., Меркотан К.К., Пташинський Д.А., Потієнко О.С., Шарф І.В., Брегід В.І., Розрахунок диференціального перерізу пружного розсіяння адронів за переданим чотириімпульсом в межах теорії збурень, *Журн. фіз. досл.* 23(1), 1101 (2019).

http://physics.lnu.edu.ua/jps/index_ua.html

4. D.A. Ptashynskiy, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, K.K. Merkotan, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskiy, V.V. Opyatyuk, O.V. Zharova, T.V. Yushkevich, I.V. Sharph, V.D. Rusov, Multiparticle fields on the subset of simultaneity, *Ukrainian Journal of Physics* 64(8), 732 (2019).

<https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019394/1441>

5. Меркотан К.К., Зеленцова Т.М., Чудак Н.О., Пташинський Д.А., Урбаневич В.В., Потієнко О.С., Войтенко В.В., Березовський О.Д., Шарф І.В., Русов В.Д., Багаточастинкові поля і механізм Хіггса, Журн. фіз. досл. 22(3), 3001 (2018).

<http://physics.lnu.edu.ua/jps/index.html>

6. N. Chudak, M. Deliyergiyev, K. Merkotan, O. Potiienko, D. Ptashynskiy, Y. Shabatura, G. Sokhrannyi, A. Tykhonov, Y. Volkotrub, I. Sharph, V. Rusov, Multi-Particle Quantum Fields, Physics Journal 2(3), 181 (2016).

<http://www.aiscience.org/journal/paperInfo/pj?paperId=2183>

7. K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskyi, I.V. Sharph, V.D. Rusov, A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, East Eur. J. Phys. 5(2), 35 (2018).

<http://eejp.univer.kharkov.ua/Biblio/2018/52p35-48.pdf>

8. Ю.Волкотруб, І. Шарф, В. Русов, Н.Чудак (Подолян), О. Потієнко, Д. Пташинський, К.Меркотан, А.Тихонов, М.Делієргієв, В.Урбаневич, Метод Лапласа для Монте-Карло-генераторів процесів розсіювання, Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика 38, 96 (2015).

http://fizyka-visnyk.uzhnu.edu.ua/article/view/110753/pdf_13

9. I.V Sharf, K. K. Merkotan, N. A. Podolyan, D. A. Ptashynskyy, A. V. Tykhonov, M. A. Deliyergiyev, G. O. Sokhrannyi, Y. V. Volkotrub, O.S. Potiyenko, V. D. Rusov, On equivalence of gluon-loop exchange in the inelastic processes in perturbative QCD to pion exchange in ϕ^3 theory, EPJ Web of Conferences 60, 20018 (2013).

https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/pdf/2013/21/epjconf_lhcp2013_20018.pdf

10. K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskyi, I.V. Sharph, V.D. Rusov, An alternative method of an electromagnetic field introduction into a

Standard Model, in Proceedings of International Conference of Young Scientists “Problems of Physics and Astronomy”, edited by A.M. Maharramov (Baku University Publishing House, Baku, 2017), 82.

<http://static.bsu.az/w10/Shekil/Conferences/MagistrLAR%20ve%20Tedqiqatcilar/Arxiv/2018/Conf%20tam.pdf>

11. N. Chudak, D. Ptashynskyi, A. Potienko, Multi-particle field operators as a method for hadron scattering description, in Abstracts of Posters of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “QCD - Old Challenges and New Opportunities” (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2017).

<https://www.we-heraeus-stiftung.de/veranstaltungen/schulen/2017/qcd-old-challenges-and-new-opportunities/>

12. O. S. Potienko, A new method for Monte-Carlo event generators of the scattering processes, in Abstracts of 18-th Odessa International Astronomical Gamov Conference-School “Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology, Cosmomicrophysics, Astroparticle Physics, Radioastronomy and Astrobiology” (Odessa, 2018), 14.

ftp://ftp.mao.kiev.ua/pub/journals/discrete/abstracts_gamow_2018.pdf

13. Ptashynskyi Dmytro, Chudak Nataliia, Merkotan Kyrylo, Potienko Oleksii, A New Symmetry of Electroweak Lagrangian, in Proceedings of the Thirteenth Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics (CIPANP 2018), edited by Wick Haxton, eConf C180529, 91.

<https://conferences.lbl.gov/event/137/session/12/>

14. O. Potienko, I. Sharf, The new method of interference contributions accounting for inelastic scattering diagrams, in Abstracts of Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “Diffractive and electromagnetic processes at high energies” (WE-Heraeus Physics School, Bad Honnef, 2015).

<http://school-diff2015.physi.uni-heidelberg.de>

15. Dmytro Ptashynskyi, Nataliia Chudak, Oleksii Potienko, Kyrylo Merkotan, Multi-particle fields as a method for hadron’s description, in Book of

Abstracts of 8th International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics (IWARA2018, Ollantaytambo, 2018), 35.

<https://indico.cern.ch/event/646046/book-of-abstracts.pdf>

16. Н.О. Чудак, К.К. Меркотан, Д.А. Пташинський, О. С. Потієнко, В.І. Брегід, Розрахунок диференціального перерізу пружного розсіяння адронів за переданим чотириімпульсом в межах теорії збурень, Тези доповідей Міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (Еврика-2018), (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018), Е6.

http://old.physics.lnu.edu.ua/confer/heureka2018/ua_index.php

17. Д.А. Пташинський, Н.О. Чудак, К.К. Меркотан, О. С. Потієнко, В.І. Брегід, Багаточастинкові польові оператори в квантовій теорії поля, Тези доповідей Міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (Еврика-2018), (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018), Е4.

http://old.physics.lnu.edu.ua/confer/heureka2018/ua_index.php

18. І.В. Шарф, О.С. Потієнко, Н.О. Подолян, Ю.В. Волкотруб, Д.А. Пташинський, К.К. Меркотан, А.В. Тихонов, М.А. Делієргієв, В.Д. Русов, Ю.В. Харитонов, Новий метод врахування інтерференційних внесків для діаграм непружного розсіяння, Матеріали міжнародної конференції молодих учених і аспірантів, (Бережа А.Е., Ужгород, 2015), 207.

<http://www.nas.gov.ua/UA/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000009639>

Апробація результатів дисертації.

Основні положення і результати дисертації доповідалися й обговорювалися на International conference Large Hadron Collider Physics 2013 – LHCP-2013 (Barcelona, Spain, 2013), Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “Diffractive and electromagnetic processes at high energies” (Physikzentrum Bad Honnef, Germany, 2015), Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physics School “QCD-Old Challenges and New Opportunities”, (Physikzentrum Bad Honnef,

Germany, 2017), Міжнародній конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика-2018” (Львів, 2018), International Conference of Young Scientists “Problems of Physics and Astronomy” (Baku, Azerbaijan, 2018), Thirteenth Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics CIPANP-2018 (Palm Springs, California, 2018), 18-th Odessa International Astronomical Gamov Conference-School “Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology, Cosmomicrophysics, Astroparticle Physics, Radioastronomy and Astrobiology” (Odessa, Ukraine, 2018), 8th International Workshop on Astronomy and Relativistic Astrophysics IWARA 2018 (Ollantaytambo, Sacred Valley, Peru, 2018), International Conference "New Trends in High-Energy Physics" (Odessa, Ukraine, 2019).