НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЛИСЬ ДАР'Я АНАТОЛІЇВНА

УДК 519.972.5:004.942.001.57

ДИСЕРТАЦІЯ

МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ

Спеціальність 121 Інженерія програмного забезпечення
Галузь знань 12 – Інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Д. А. Лись

Науковий керівник — Положаєнко Сергій Анатолійович,
доктор технічних наук, професор

Одеса – 2023

АНОТАЦІЯ

Лись Д. А. Моделі, методи та засоби математичного моделювання динамічних станів парорідинних двофазних систем. − Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 121 — Інженерія програмного забезпечення. — Національний університет «Одеська політехніка», Одеса, 2023.

В роботі було вирішено важливу науково-практичну задачу, яка полягає у створенні моделей та методів числового моделювання динамічних станів парорідинних двофазних систем — ґрунтуючись на підході узагальнення, а також у розробці інструментальних програмно-алгоритмічних засобів моделювання, які забезпечують конструктивний розв’язок задач в практиці досліджень та інженерних розрахунків для широкої гами енергетичних процесів і об’єктів природного походження та технологічного призначення.

За результати дослідження низки промислово важливих (зокрема, в енергетиці, добувній, хімічній, переробній галузях промисловості тощо) та поширених у природі (наприклад, рух ґрунтових вод, розповсюдження рідких та газо- і пароподібних забруднень, випаровування з відстійників та фільтраційних споруд тощо) процесів і об’єктів показано, що їх фізичний перебіг визначають динамічні стани у парорідинних двофазних системах. При цьому було відзначено, що хвильова динаміка двофазних систем являє собою новий розділ механіки гетерогенних систем та теплофізики, який набуває останнім часом інтенсивного розвитку.

Разом з тим було зазначено, що брак розвинутої теоретичної бази та вичерпних практичних досліджень у цій області потребують залучення сучасних результатів нелінійної хвильової динаміки, розробки нових способів врахування міжфазної взаємодії, використання сучасних моделей хвильових рухів, зокрема таких як «ударні хвилі» та «пакетні хвилі». Водночас показано дієвість та конструктивність застосування апарату варіаційних нерівностей для розробки

адекватних математичних моделей нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем.

Виконано аналіз питань математичного опису та машинних методів математичного моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем, який дозволив визначити проблематику задач теоретичного та практичного характеру, що виникають при цьому.

Запропоновано та узагальнено математичні моделі рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем для найбільш поширених їх проявів: режиму утворення та розповсюдження хвиль, бульбашкового режиму та випадку з границею розділу компонент у рідинній складовій. Також запропоновано методи їх (моделей) числової реалізації, саме: для рівновагових динамічних станів метод зводиться до дискретизації неперервних математичних моделей за явно-неявною схемою та подальшого розв’язування результуючої системи дискретних алгебраїчних рівнянь за ітераційним процесом Зейделя, а для нерівновагових динамічних станів метод полягає у розв’язуванні оптимізаційної задачі і зводиться до пошуку максимуму функції Гамільтона, записаної для розширеної узагальненої математичної моделі досліджуваного динамічного стану.

Розроблено комплекс комп’ютерних проблемно-орієнтованих інструментальних програмних засобів моделювання за допомогою яких виконано числове дослідження запропонованих математичних моделей рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем при розв’язування низки реальних прикладних задач, що підтвердило коректність та спроможність цих моделей для практичного застосування.

Ключові слова: динамічний стан, пароріднинна двофазна система, хвильовий процес, бульбашковий режим, математична модель, моделювання, числовий метод.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові роботи, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Положаєнко С. А. Математична формалізація динамічних станів пароріднинних двофазних систем [Текст] / С. А. Положаєнко, *Д. А. Лись* // *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2021. Т. 11, № 1-2. С. 136–143. https://doi.org/10.15276/imms.v11.no1-2.134. (**Index Copernicus, ICV 2014: 66.39 Google Scholar)**. URL: http://immm.opu.ua/#a23; http://immm.opu.ua/files/archive/n1-2_v11_2021/immm_n1_2_v11_2021.pdf

2. Polozhaenko S. Modeling of wave processes in two-phase gas-liquid systems [Текст] / S. Polozhaenko. *Lys D.* // *Colloquium-journal*. Part 1, 2021. № 32 (119). P. 37–41. https://doi.org/10.24412/2520-6990-2021-32119-37-41. (**Index Copernicus**). URL: http://www.colloquium-journal.org/wp-content/uploads/2021/11/colloquium-journal-32119-chast-1.pdf; http://www.colloquium-journal.org/32119-2

3. Положаєнко С. А. Моделювання хвильових процесів у газоріднинних системах [Текст] / С. А. Положаєнко, *Д. А. Лись* // *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 22. С. 88–96. https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.88-96. **(Bielefeld Academic Search, Engine, Citefactor, Cosmos Impact Factor Crossref, JIFACTOR, General Impact Factor, Google Академія, InfoBase Index, International Citation, Index of journal impact factor & indexing, OpenAIRE, PKP Index, ResearchBib, Scientific Indexing Services, WorldCat, Наукова періодика України НБУВ)**. URL: http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive

4. *Lys Daria*. Analysis of calculation methods, obtaining estimates and

ensuring the accuracy of simulation of control objects [Текст] / *Daria Lys* // *Scientific Collection «InterConf», (90): with the Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Conference «Current Issues and Prospects for the Development of Scientific Research»* (December 7-8, 2021). Orléans, France: Epi, 2021. P. 485–499. https://doi.org/10.51582/interconf.7-8.12.2021.055. **(Index Copernicus, Citefactor, LinkedInSlideShare, Issuu**, **Calaméo, Google Scholar).** URL: https://www.interconf.top/documents/2021.12.7-8.pdf
https://www.interconf.top/archive.html

5. *Лись Д. А.* Математична модель динамічного стану пароріднинної суміші у пластових структурах [Текст] / Д. А. Лись // *Праці VIII Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю. П. Кунченка* : Тези доповідей. – Черкаси: ЧДТУ, 25–26 травня, 2021. С. 43–45. **(Index Copernicus CrossRef, Bielefeld Academic Search Engine, Directory of Open Access Journals, ESJI, Google Академія, ResearchBib, WorldCat Наукова періодика України НБУВ)** URL: https://chdtu.edu.ua/osnp/materials.

6. *Lys Daria*. Problems of basic objective of simulation and identification of dynamic states of vapor-liquid two-phase systems [Текст] / *Lys Daria* // *Sectoral research XXI : characteristics and features: collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the III International Scientific and Theoretical Conference* Chicago, USA : European Scientific Platform. April 22, 2022. Vol. 2. P. 78–80 ISBN 979-8-88526-804-2 https://doi.org/10.36074/scientia-22.04.2022 **(CrossRef, OUCI, Google Scholar)** URL:
https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/scientia/issue/view/22.04.2022?utm_source=eSputnikromo&utm_medium=email&utm_campaign=Konferenc%D1%96ja_%7C_Status_:_opubl%D1%96kovano&utm_content=1499726888;
https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/scientia/issue/view/22.04.2022/733

7. *Lys Daria*. Mathematical models for formation and diffusion of waves in vapor-liquid two-phase systems [Текст] / *Lys Daria* // *The XVI International Scientific and Practical Conference «Innovative trends of science and practice, tasks and ways to*

solve them», April 26–29. Athens, Greece, 2022. P. 682–687 ISBN – 979-8-88526-740-3 https://doi.org/10.46299/ISG.2022.1.16 **(CrossRef, OUCI, Google Scholar, Academic Resource Index (eserchBib), Bowker, УкрІнтел)** URL: https://isg-konf.com/innovative-trends-of-science-and-practice-tasks-and-ways-to-solve-them/

8. *Лись Д. А*. Математична формалізація та обчислювальна реалізація динамічної моделі для середовища з дисипативним ефектом [Текст] / *Д. А. Лись* // *Науковий простір: актуальні питання, досягнення та інновації* : матеріали III Міжнародної наукової конференції. Міжнародний центр наукових досліджень. Хмельницький : Вінниця: Європейська наукова платформа, 13 травня, 2022 р. С. 310–313 УДК 001 (08), ISBN 978-617-8037-75-8, https://doi.org/10.36074/mcnd-13.05.2022 **(Google Scholar, CrossRef, ORCID & OUCI)** URL: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/mcnd/issue/view/13.05.2022/743; https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/mcnd/issue/view/13.05.2022?utm_source=eSputnik-promo&utm_medium=email&utm_campaign=Konferenc%D1%96ja_%7C_Status_:_opubl%D1%96kovano&utm_content=1499726888

9. *Лись Д. А*. Розробка узагальненої математичної моделі рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем [Текст] / *Д. А. Лись* // матеріали Дванадцятої Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених «Сучасні інформаційні технології – 2022» «Modern Information Technology – 2022» (19-20 травня 2022 р., м. Одеса) / МОН України; Державний університет «Одеська політехніка»; Ін-т комп'ют. систем. Одеса : Наука і техніка, 2022. С. 122-123 ISSN 2708-311X; УДК 004.91(063)М341 URL: http://ics_conf.tilda.ws/ukr; https://drive.google.com/file/d/1tRDt3ddXv6LvEGlRtbc5SjQYJg2eg0tH/view?usp=sharing

10. Fomin O. Interpretation of Dynamic Models Based on Neural Networks in the Form of Integral-Power Series [Текст] / O. Fomin, S. Polozhaenko, V. Krykun, A. Orlov, *D. Lys //* In: Arsenyeva, O., Romanova, T., Sukhonos, M., Tsegelnyk, Y. (eds) *Smart Technologies in Urban Engineering*. STUE 2022. Lecture Notes in Networks and

Systems, 2022. Vol 536. Springer, Cham. P. 258–265 https://doi.org/10.1007/978-3-031-20141-7_24 **(Scopus, Web of Science Core Collection, INSPEC, WTI Frankfurt eG, zbMATH, SCImago)** – URL: http://stue.kname.edu.ua/proceedings/; https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-20141-7_24

11. Polozhaenko S. Interpretation Method for Dynamic States Neural Network Models [Текст] / S. Polozhaenko, O. Fomin, A. Orlov, V. Krykun, *D. Lys* // *IEEE Third International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)* (October 4-6, 2022), 2022. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/SAIC57818.2022.9923008; ISBN:979-8-3503-9674-4; ISBN:979-8-3503-9675-1; **(Springer link, IEEE Xplore Digital Library and Indexing databases (Scopus, Web of Science and etc)** – URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/9923008/authors#authors; https://ieeexplore.ieee.org/xpl/conhome/9922952/proceeding?isnumber=9922911&pageNumber=2

12. *Лись Д. А.*, Прокофьєв А.Ю. Моделювання динамічного стану ударних хвиль у пароріднинних двофазних системах [Текст] / *Д. А. Лись*, А. Ю. Прокофьєв // *«Сучасні Інформаційні Технології 2023»:* матеріали XIII міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених (18-19 травня 2023 р., м. Одеса) / МОН України; Національний університет «Одеська політехніка»; Ін-т комп'ют. систем. Одеса : Наука і техніка, 2023. С. 159–161 ISSN 2708-311X URL: https://drive.google.com/file/d/1ERFn923__zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view

13. *Лись Д. А.,* Прокофьєв А. Ю. Розробка та числова реалізація математичної моделі гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи [Текст] / *Д. А. Лись*, А. Ю. Прокофьєв *// Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2023. Т. 13, № 1-2. С. 97–103. https://doi.org/10.15276/imms.v13.no1-2.97. **(Index Copernicus, ICV 2014: 66.39 Google Scholar)** URL: http://immm.opu.ua/#a23; http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v13_2023/immm_n1-2_v13_2023.pdf

ABSTRACT

Lys D. Models, methods and means of mathematical modeling of dynamic states of vapor-liquid two-phase systems. − Qualifying scientific work as a copyrights manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of philosophy on a specialty 121 — Software engineering. — Odessa Polytechnic National University, Odessa, Ukraine, 2023.

The work solved an important scientific and practical task, which consists in the creation of models and methods of numerical simulation of dynamic states of vapor-liquid two-phase systems – based on the unification approach, as well as in the development of instrumental software and algorithmic modeling tools that provide a constructive solution to problems in practice research and engineering calculations for a wide range of energy processes and objects of natural origin and industrial type.

According to the results of the study, a number of industrially important (in particular, in energy, mining, chemical, processing industries, etc.) and common in nature (eg, groundwater movement, distribution of liquid and gaseous and vapor pollutants, evaporation from settling tanks and filtration facilities, etc.) and objects, it is shown that their physical course is determined by dynamic states in vapor-liquid two-phase systems. It was noted that the wave dynamics of two-phase systems is a new branch of the mechanics of heterogeneous systems and thermophysics, which has recently been intensively developed.

However, it was noted that the lack of developed theoretical basis and comprehensive practical research in this area requires the use of modern results of nonlinear wave dynamics, development of new ways to account for interphase interaction, use of modern models of wave motion, such as shock waves and packet waves». At the same time, the efficiency and constructiveness of the application of the apparatus of variational inequalities for the development of adequate mathematical models of nonequilibrium dynamic states of vapor-liquid two-phase systems are shown.

The analysis of questions of mathematical description and machine methods of mathematical modeling of dynamic states of vapor-liquid two-phase systems is carried out, which allowed to determine the problems of theoretical and practical problems that arise in this case.

Mathematical models of equilibrium and nonequilibrium dynamic states of vapor-liquid two-phase systems for the most common manifestations are proposed and generalized: the mode of wave formation and propagation, bubble mode and the case with the interface of components in the liquid component. Methods of their (models) numerical realization are also offered, namely: for equilibrium dynamic states the method is reduced to discretization of continuous mathematical models by implicit scheme with weights and further solution of the obtained system of discrete equations by Seidel iterative procedure, and for nonequilibrium dynamic states the method consists in solving the optimization problem and is reduced to finding the maximum of the Hamilton function written for the extended generalized mathematical model of the studied dynamic state.

A set of computer problem-oriented modeling software tools was developed, which performed a numerical study of the proposed mathematical models of equilibrium and nonequilibrium dynamic states of vapor-liquid two-phase systems in solving a number of real applications, which confirmed the correctness and ability of these models for practical application.

Keywords: dynamic state, vapor-liquid two-phase system, wave process, bubble mode, mathematical model, modeling, numerical method.

LIST OF PUBLICATIONS OF THE AUTHOR

1. Положаєнко С. А. Математична формалізація динамічних станів пароріднинних двофазних систем [Текст] / С. А. Положаєнко, *Д. А. Лись* // *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2021. Т. 11, № 1-2. С. 136–143. https://doi.org/10.15276/imms.v11.no1-2.134. (**Index Copernicus, ICV 2014: 66.39 Google Scholar)**. URL: http://immm.opu.ua/#a23; http://immm.opu.ua/files/archive/n1-2_v11_2021/immm_n1_2_v11_2021.pdf

2. Polozhaenko S. Modeling of wave processes in two-phase gas-liquid systems [Текст] / S. Polozhaenko. *Lys D.* // *Colloquium-journal*. Part 1, 2021. № 32 (119). P. 37–41. https://doi.org/10.24412/2520-6990-2021-32119-37-41. (**Index Copernicus**). URL: http://www.colloquium-journal.org/wp-content/uploads/2021/11/colloquium-journal-32119-chast-1.pdf; http://www.colloquium-journal.org/32119-2

3. Положаєнко С. А. Моделювання хвильових процесів у газоріднинних системах [Текст] / С. А. Положаєнко, *Д. А. Лись* // *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 22. С. 88–96. https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.88-96. **(Bielefeld Academic Search, Engine, Citefactor, Cosmos Impact Factor Crossref, JIFACTOR, General Impact Factor, Google Академія, InfoBase Index, International Citation, Index of journal impact factor & indexing, OpenAIRE, PKP Index, ResearchBib, Scientific Indexing Services, WorldCat, Наукова періодика України НБУВ)**. URL: http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive

4. *Lys Daria*. Analysis of calculation methods, obtaining estimates and ensuring the accuracy of simulation of control objects [Текст] / *Daria Lys* // *Scientific Collection «InterConf», (90): with the Proceedings of the 4th International Scientific*

and Practical Conference «Current Issues and Prospects for the Development of Scientific Research» (December 7-8, 2021). Orléans, France: Epi, 2021. P. 485–499. https://doi.org/10.51582/interconf.7-8.12.2021.055. **(Index Copernicus, Citefactor, LinkedInSlideShare, Issuu**, **Calaméo, Google Scholar).** URL: https://www.interconf.top/documents/2021.12.7-8.pdf
https://www.interconf.top/archive.html

5. *Лись Д. А.* Математична модель динамічного стану парорідинної суміші у пластових структурах [Текст] / Д. А. Лись // *Праці VIII Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю. П. Кунченка* : Тези доповідей. – Черкаси: ЧДТУ, 25–26 травня, 2021. С. 43–45. **(Index Copernicus CrossRef, Bielefeld Academic Search Engine, Directory of Open Access Journals, ESJI, Google Академія, ResearchBib, WorldCat Наукова періодика України НБУВ)** URL: https://chdtu.edu.ua/osnp/materials.

6. *Lys Daria*. Problems of basic objective of simulation and identification of dynamic states of vapor-liquid two-phase systems [Текст] / *Lys Daria* // *Sectoral research XXI : characteristics and features: collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the III International Scientific and Theoretical Conference* Chicago, USA : European Scientific Platform. April 22, 2022. Vol. 2. P. 78–80 ISBN 979-8-88526-804-2 https://doi.org/10.36074/scientia-22.04.2022 **(CrossRef, OUCI, Google Scholar)** URL:
https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/scientia/issue/view/22.04.2022?utm_source=eSputnikromo&utm_medium=email&utm_campaign=Konferenc%D1%96ja_%7C_Status_:_opubl%D1%96kovano&utm_content=1499726888;
https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/scientia/issue/view/22.04.2022/733

7. *Lys Daria*. Mathematical models for formation and diffusion of waves in vapor-liquid two-phase systems [Текст] / *Lys Daria* // *The XVI International Scientific and Practical Conference «Innovative trends of science and practice, tasks and ways to solve them»*, April 26–29. Athens, Greece, 2022. P. 682–687 ISBN – 979-8-88526-740-3 https://doi.org/10.46299/ISG.2022.1.16 **(CrossRef, OUCI, Google Scholar,**

Academic Resource Index (eserchBib), Bowker, УкрІнтел) URL: https://isg-konf.com/innovative-trends-of-science-and-practice-tasks-and-ways-to-solve-them/

8. *Лись Д. А*. Математична формалізація та обчислювальна реалізація динамічної моделі для середовища з дисипативним ефектом [Текст] / *Д. А. Лись* // *Науковий простір: актуальні питання, досягнення та інновації* : матеріали III Міжнародної наукової конференції. Міжнародний центр наукових досліджень. Хмельницький : Вінниця: Європейська наукова платформа, 13 травня, 2022 р. С. 310–313 УДК 001 (08), ISBN 978-617-8037-75-8, https://doi.org/10.36074/mcnd-13.05.2022 **(Google Scholar, CrossRef, ORCID & OUCI)** URL: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/mcnd/issue/view/13.05.2022/743; https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/mcnd/issue/view/13.05.2022?utm_source=eSputnik-promo&utm_medium=email&utm_campaign=Konferenc%D1%96ja_%7C_Status_:_opubl%D1%96kovano&utm_content=1499726888

9. *Лись Д. А*. Розробка узагальненої математичної моделі рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем [Текст] / *Д. А. Лись* // матеріали Дванадцятої Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених «Сучасні інформаційні технології – 2022» «Modern Information Technology – 2022» (19-20 травня 2022 р., м. Одеса) / МОН України; Державний університет «Одеська політехніка»; Ін-т комп'ют. систем. Одеса : Наука і техніка, 2022. С. 122-123 ISSN 2708-311X; УДК 004.91(063)М341 URL: http://ics_conf.tilda.ws/ukr; https://drive.google.com/file/d/1tRDt3ddXv6LvEGlRtbc5SjQYJg2eg0tH/view?usp=sharing

10. Fomin O. Interpretation of Dynamic Models Based on Neural Networks in the Form of Integral-Power Series [Текст] / O. Fomin, S. Polozhaenko, V. Krykun, A. Orlov, *D. Lys //* In: Arsenyeva, O., Romanova, T., Sukhonos, M., Tsegelnyk, Y. (eds) *Smart Technologies in Urban Engineering*. STUE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, 2022. Vol 536. Springer, Cham. P. 258–265 https://doi.org/10.1007/978-3-

031-20141-7_24 **(Scopus, Web of Science Core Collection, INSPEC, WTI Frankfurt eG, zbMATH, SCImago)** – URL: http://stue.kname.edu.ua/proceedings/; https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-20141-7_24

11. Polozhaenko S. Interpretation Method for Dynamic States Neural Network Models [Текст] / S. Polozhaenko, O. Fomin, A. Orlov, V. Krykun, *D. Lys* // *IEEE Third International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)* (October 4-6, 2022), 2022. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/SAIC57818.2022.9923008; ISBN:979-8-3503-9674-4; ISBN:979-8-3503-9675-1; **(Springer link, IEEE Xplore Digital Library and Indexing databases (Scopus, Web of Science and etc)** – URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/9923008/authors#authors; https://ieeexplore.ieee.org/xpl/conhome/9922952/proceeding?isnumber=9922911&pageNumber=2

12. *Лись Д. А.*, Прокофьєв А.Ю. Моделювання динамічного стану ударних хвиль у пароріднинних двофазних системах [Текст] / *Д. А. Лись*, А. Ю. Прокофьєв // *«Сучасні Інформаційні Технології 2023»:* матеріали XIII міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених (18-19 травня 2023 р., м. Одеса) / МОН України; Національний університет «Одеська політехніка»; Ін-т комп'ют. систем. Одеса : Наука і техніка, 2023. С. 159–161 ISSN 2708-311X URL: https://drive.google.com/file/d/1ERFn923__zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view

13. *Лись Д. А.,* Прокофьєв А. Ю. Розробка та числова реалізація математичної моделі гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи [Текст] / *Д. А. Лись*, А. Ю. Прокофьєв *// Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2023. Т. 13, № 1-2. С. 97–103. https://doi.org/10.15276/imms.v13.no1-2.97. **(Index Copernicus, ICV 2014: 66.39 Google Scholar)** URL: http://immm.opu.ua/#a23; http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v13_2023/immm_n1-2_v13_2023.pdf

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ 17

ВСТУП 19

РОЗДІЛ 1. СТАН ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ТА МАШИННИХ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ…….. 30

1.1. Фізичні явища утворення та існування пароріднинної рівноваги. Задачі моделювання та ідентифікації…… 30

1.2. Математична формалізація та обчислювальна реалізація математичних моделей динамічних станів паро рідинних двофазних систем…… 43

1.2.1. Математичні моделі динамічних станів пароріднинних двофазних систем…… 43

1.2.2. Методи та засоби обчислювальної реалізації математичних моделей динамічних станів пароріднинних двофазних систем…… 62

1.3. Проблематика основних задач моделювання та ідентифікації динамічних станів пароріднинних двофазних систем…….. 70

Висновки до розділу 1…….. 77

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТИПОВИХ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ…….. 79

2.1. Математичні моделі утворення та розповсюдження хвиль у пароріднинних двофазних системах…… 79

2.2. Математичні моделі «коміркового» бульбашкового динамічного стану пароріднинних двофазних систем……. 90

2.3. Математичні моделі динамічних станів пароріднинних двофазних систем з границею розділу компонент у рідинній складовій…….. 101

Висновки до розділу 2…….. 113

РОЗДІЛ 3. ДИСКРЕТНІ АНАЛОГИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ.. 114

3.1. Узагальнення математичного опису динамічних станів пароріднних двофазних систем…… 114

3.1.1. Узагальнена ММ рівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем та її дискретний аналог... 114

3.1.2. Узагальнена ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем та її дискретний аналог... 120

3.2. Методи реалізації ММ динамічних станів пароріднних двофазних систем…… 128

3.2.1. Метод реалізації ММ рівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем…… 128

3.2.2. Метод реалізації ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем…… 131

3.3. Числові дослідження динамічних станів пароріднних двофазних систем на основі використання дискретних аналогів узагальнених математичних моделей…… 139

Висновки до розділу 3……... 147

РОЗДІЛ 4. КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ.. 149

4.1. Структурна організація обчислювальних процедур в комплексі інструментальних програмно-алгоритмічних засобів……. 149

4.2. Моделювання рівновагового випарювання в задачі динаміки парової бульбашки……... 157

4.3. Моделювання динамічного стану виникнення та розвитку ударних хвиль у пароріднних двофазних системах……... 163

Висновки до розділу 4……... 173

ВИСНОВКИ…… 174

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……. 177

Додаток А. Документи, що підтверджують впровадження результатів дисертаційної роботи……. 196

Додаток Б. Визначення умови збіжності ітераційної процедури Зейделя для системи рівнянь (2.29) (або (2.30))…….. 201

Додаток В. Реалізація інструментальних програмно-алгоритмічних засобів математичного моделювання динамічних станів парорідинних двофазних систем……... 203

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

ІПЗ	—	Інструментальні програмні засоби
ГУ	—	Граничні умови
ММ	—	Математична модель
ПУ	—	Початкові умови
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{g}, \mathbf{x}$	—	Матриці коефіцієнтів (вектори змінних)
$a(u, v-u)$	—	Білінійна форма
a_1	—	Температуропровідність рідини (розділи 2.1, 2.2)
c_1, c_0	—	Швидкість звуку в рідині, швидкість звуку у бульбашковому середовищі
$D_g\left(\mathbf{\Phi}_i, t, \bar{x}\right)$	—	Інтенсивність збуджень
$q\left(t, \bar{x}\right)$	—	Тепловий потік
$\mathbf{j}(\cdot), \mathbf{J}(\cdot)$	—	Функціонали
m	—	Крок дискретизації за часом (розділ 3, розділ 4)
$P = P\left(\bar{z}, t\right)$	—	Розподілена функція ваги вантажу, що перевозиться у відповідному НРС
Q	—	Поверхня циліндру $\Omega \times t$
$T, t, t = \left[0, t_{\text{к}}\right]$	—	Період часу, незалежна часова координата, інтервал часу
$x, \bar{x} = \left[x_1, x_2, ..., x_n\right]$	—	Незалежна просторова координата, вектор незалежних просторових координат

$T_{\text{ос}}, T_{\text{рад}}, T = T(t,\bar{x}), T_{\text{вн}} = T_{\text{вн}}(t,\bar{x})$	—	Температури оточуючого середовища, радіаційного опромінення, розподілена функція температури та внутрішньої порожнини каналу, в якому рухається двофазна паро рідинна система
r, R	—	Радіус бульбашки
$U_g(t,\bar{x})$	—	Інтенсивність джерел
V	—	Об’єм
α	—	Швидкість розширення у паро рідинній двофазній системі (розділ 1.1)
χ, X	—	Паровміст у двофазній системі, масовий паровміст
μ, ρ, C_p, α	—	Відповідно в’язкість, густина, теплоємність, коефіцієнт теплопередачі речовин, що складають фази пародинної системи
$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(t,\bar{x})$	—	Шукана розподілена функція стану для узагальненої ММ (розділ 3.3)
$\Omega, \Gamma, \overline{\Omega}$	—	Просторова область та її границя, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замикання

Тлумачення інших скорочень та позначок, які не мають поширеного застосування, розкрито по тексту дисертаційної роботи.

ВСТУП

Актуальність. Інтенсивний розвиток фізичної механіки *багатофазних середовищ* зумовлено як класичними, так і новими задачами науки та техніки. Спираючись, зокрема, на переконливі приклади в галузі енергетики, де *двофазні середовища* широко використовуються в якості основних робочих тіл, слід зазначити, що надто гостро назріла необхідність рішення проблем, пов'язаних з рухом двофазних парорідинних середовищ, в тому числі — у зв'язку з розвитком атомної енергетики — де, як відомо, використовуються турбіни «вологого» пару. Так, внаслідок нераціональної організація парорідинного потоку в проточній частині, може бути спричинено суттєве зменшення ККД турбоагрегату та різке зменшення надійності його роботи (ерозійне зношення; виникнення нестаціонарних режимів плину «вологого» пару, які обумовлюють руйнування лопаточних апаратів тощо). При цьому виникають дві взаємопов'язані проблеми, викликані двофазністю потоку, як-то в галузі енергетики, а саме: підвищення економічності та надійності турбін, що повинні вирішуватися спільно.

Також, на випадках об'єктів в галузі енергетики, необхідно вказати, що характер процесів в контурах реакторів, парогенераторів, теплообмінників різноманітного типу так само багато в чому визначається *двофазністю* робочого середовища. Локалізація та усунення можливих аварійних ситуацій, заподіяних розривом трубопроводів «високого» тиску в контурах атомних електростанцій, викликає нагальну необхідність дослідження та розрахунку складних нестаціонарних та нерівновагових парорідинних плинів з надзвуковими швидкостями.

Процеси, що супроводжуються утворенням або використанням двофазних середовищ, поширені дуже широко в природі та техніці і не обмежуються тільки енергетикою. Так, розв'язування значного кола прикладних задач пов'язано з плином та застосуванням аерозолів різного типу. Авіація та космонавтика неодмінно стикаються з необхідністю рішення таких проблем, як рух літальних

апаратів в умовах хмарності, взаємодія космічних апаратів з атмосферою планет, тощо.

Проблеми, пов'язані з рухом та тепло- масообміном у багатофазних середовищах, виникають при інтенсифікації процесів в хімічному виробництві, транспортуванні природного газу та розв'язуванні нових задач що випливають у зв'язку з безпосереднім перетворенням теплової енергії в електричну (наприклад, рідинно-металеві МГД-генератори тощо). Перелік проблем та додатків легко продовжити. Таким чином очевидно, що при їх вивченні необхідно глибоке занурення у фізичну сутність процесів, які відбуваються при суттєво *нерівновагових багатофазних плинах*. Фізична механіка багатофазних середовищ являє собою галузь знань, що охоплює найрізноманітніші аспекти механіки *суцільних середовищ*, термодинаміки, тепло- масообміну, фізичної кінетики, електрофізики, тощо.

Складність розв'язування задач щодо формування руху багатофазних систем зумовлено нерівноваговими процесами теплової та гідродинамічної взаємодії фаз, наявністю фазових переходів, а також численністю структур і формі снування дискретної фази.

Значна практична важливість перерахованих задач зумовлена проведенням широких досліджень в цій галузі. Слід зазначити, що перші теоретичні роботи та експериментальні результати щодо досліджень двофазних потоків, представлені вітчизняними та зарубіжними вченими (зокрема, в парогенеруючих каналах), відносяться до 50-х років минулого століття. Можна із впевненістю сказати, що на теперішній час досягнуто значних успіхів у розвитку цієї галузі науки, як про це свідчать численні статті та монографії. Так накопичення обширного експериментального матеріалу дозволило виявити основні фізичні закономірності руху дисперсних систем. Побудовано виправдані моделі багатофазних середовищ та сформульовано основні рівняння. Значними є успіхи в області дослідження процесів нерівновагового утворення та руху парокрапельних потоків, зокрема., при спонтанній конденсації пару у надзвукових соплах та проточних частинах турбін «вологого» пару.

Проведено значні роботи із вивчення *хвильових процесів* у двофазних середовищах при плівкових течіях. Інтенсивно розробляються числові методи дослідження багатофазних нерівновагових плинів, і, зокрема, методи наскрізного обчислення для плинів змішаного типу, які містять дозвукові та надзвукові ударні хвилі.

Відомо [1 — 3], що одним з головних факторів, які визначають характеристики двофазних потоків, є їх *дисперсна структура*. У зв'язку з цим слід відзначити появу та розповсюдження нових методів експериментального дослідження динамічних та структурних характеристик таких потоків, і насамперед, ефективних методів лазерної діагностики розмірів часток конденсованої фази, їх швидкості тощо.

Достатньо поширеними є роботи [наприклад, 4 — 7], що містять як певні узагальнення в окремих областях фізичної механіки [8, 9] багатофазних середовищ, так і нові оригінальні результати [зокрема, 10 — 12]. Слід зазначити, що не дивлячись на певні успіхи та досягнення, а також значну кількість робіт, що проводяться в області цієї відносно молодої та такої, що інтенсивно розвивається, науки, багато важливих задач як загально фізичних, так і прикладних, не тільки не розв'язано до кінця, але, навіть, ще не поставлено з достатньою певністю.

Так необхідним є подальший розвиток робіт в області міжфазового тепло-масообміну в нерівновагових системах, дослідження можливостей та способів переносу отриманих результатів на інші речовини при широкому застосуванні теорії подібностей. Недостатньо ще приділяється уваги розвитку експериментальних досліджень *парорідинних потоків* в області високих термодинамічних параметрів, а також розвитку *числових методів* дослідження нестаціонарних та неодновимірних двофазних плинів зі змінними структурами. Недостатньо вивчено проблеми турбулентності та її вплив на процеси у релаксуючих багатофазних системах. На початковій стадії перебувають дослідження в області гідродинаміки двофазного приграничного шару. Необхідна розробка методів ефективного управління структурою двофазних потоків в енергетичних технологічних пристроях різноманітного типу. При цьому, наявні

результати в області фізичної механіки, потребують обговорення, що сприятиме поглибленому та чіткому виявленню найбільш важливих і необхідних напрямків досліджень у цій області.

Останнім часом значної ваги набуває задача дослідження плину двофазного потоку з різним паровмістом в каналах, що змінюють напрямок руху і величину поперечного перерізу. Дана задача характерна для багатьох елементів енергетичного обладнання — трубопроводів, теплообмінників, запірної і регулюючої арматури. Аналіз умов, в яких перебувають окремі елементи обладнання, показує, що найбільш характерними і небезпечними є ударна дія крапель, кавітаційна ерозія, хімічна і електрохімічна корозія. Забезпечення безпечної і надійної роботи теплообмінного обладнання, запірної арматури, трубопроводів, що працюють в напружених умовах, визначає *актуальність* і необхідність вивчення процесів тепло- масопереносу в каналах складної форми при плинові двофазних потоків. Прямокутні мініканали є елементами компактних пластинчастих теплообмінників, які широко використовуються для забезпечення необхідних теплових режимів устаткування в енергетиці, мікроелектроніці, кріогенній апаратурі, авіаційній і космічній техніці, хімічній технології та багатьох інших додатках. Режими плину двофазного потоку в теплообмінниках, призначених для зрідження природного газу, характеризуються широким діапазоном зміни паровмісту по довжині апаратів, практично від 0% до 100%. Моделювання плину таких середовищ за допомогою кріогенних рідин дозволяє отримати максимально близькі закономірності перебігу і теплообміну, необхідні при проектуванні теплообмінників для зрідження природного газу і кріогенних дистиляційних колон. У процесах абсорбції, дистиляції, випарювання основними робочими рідинами є розчини і суміші різних речовин, а *плівковий плин* є основним режимом плину рідини. Внаслідок малого термічного опору і значній міжфазовій поверхні *стікаючі плівки* виявляються ефективними в процесах міжфазного тепло- масообмену, де не потрібні великі температурні напори і перепади тиску. Для інтенсифікації теплообміну в стікаючих плівках як в режимі випаровування, так і бульбашкового кипіння, в промисловості використовують

так звані «розвинені поверхні» (різноманітні типи оребрення, шипи, нанесення пористих покриттів, установку сіток з характерними розмірами, які можна порівняти з товщиною плівок і довжинами хвиль). Дослідження теплообміну в стікаючих плівках чистих речовин та їх сумішей, пошук найбільш ефективних структурованих поверхонь, що сприяють підвищенню коефіцієнтів тепловіддачі і граничних теплових потоків для забезпечення стійкої роботи тепло-масообмінних апаратів, є *актуальною* теплофізичною задачею.

Дистиляція і ректифікація (як різновид важливих і поширених, переважно промислових технологічних процесів, в яких спостерігається рух пароріднинних сумішей) є надзвичайно енергоємними процесами, тому ефективність розділення (тобто суміші на окремі фази) — один з головних параметрів, що визначають експлуатаційні витрати, капітальні витрати і габарити даного обладнання. Зустрічний плин відповідно пара і рідини в складних канальних системах структурованих насадок дистиляційної колони є основним режимом, щоб дозволити передачу речовин на межі поділу, тому дослідження процесу масопереносу і ефективності поділу також є *актуальною* задачею. Основними конструктивними параметрами, що визначають закономірності масопереносу в розділових колонах, є характерні розміри і форми каналів насадок та структури їх поверхні, а також і розміри і форма пакетів насадок. Дані, отримані на лабораторних установках, як правило, не відтворюються в промислових установках. Тому принципово важливим для вирішення цих задач є проведення досліджень гідродинаміки та тепло- масообміну при зустрічному плину пара і рідини на великомасштабних установках. Дослідження явищ переносу на міжфазній границі, збільшення продуктивності колон і ефективності поділу, розробка більш ефективного обладнання для процесів розділення, підвищення економічності розділових установок є *актуальною* задачею як для академічних досліджень, так і передових дослідницьких груп, пов’язаних з провідними виробниками дистиляційних розділових установок.

При цьому слід зазначити, що проведення натурних експериментів для отримання результатів зазначених вище досліджень пов’язано, по-перше, з

труднощами технічного характеру (робота обладнання не тільки в нормальних умовах експлуатації, а й в критичних і, навіть, аварійних режимах; ресурсне виснаження обладнання), по-друге, зі значними економічними та часовими витратами (обладнання перебуває в експлуатації із задіяним обслуговуючим персоналом, а експерименти тривають у реальному часі), по-третє, результати експериментів потребують додаткової обробки (аналіз шуканих параметрів у вигляді графіків, номограм або таблиць, отримання характеристик а основі емпіричних залежностей), тощо. Тому на сучасному етапі проведення наукових досліджень значна увага приділяється проведенням досліджень на основі *математичного моделювання*, що дозволяє значно підвищити ефективність цих досліджень та забезпечити гнучкість та бажану повноту у їх проведенні.

Таким чином, на сучасний рівень проблеми якісного та кількісного визначення параметрів плину пароріднинних двофазних систем спостерігається *вплив протиріччя*: за гострої потреби всебічного і повного визначення характеристик динамічних станів у двофазних системах, які розглядаються, відсутня достатня теоретична база та інструментальні засоби щодо проведення експериментальних досліджень бажаної формалізованої постановки та ступеню отримуваних результатів.

Зв’язок роботи з науковими програмами, темами, планами. Дисертаційна робота виконувалася у відповідності до пріоритетних напрямків науково-дослідних робіт Одеського національного політехнічного університету (ОНПУ) (з 2022 р. — Національний університет «Одеська політехніка»), згідно координаційних планів Міністерства освіти і науки України, зокрема, в рамках наукових досліджень за держбюджетними науково-дослідними роботами (НДР): «Засоби моніторингу динамічних об’єктів, засновані на застосуванні моделей у вигляді нечітких множин» № 152 – 63, 2018 — 2021 р. р. (держ. реєстрації 0118U006825) та «Методи та програмні засоби інтерпретації моделей машинного навчання непараметричних динамічних об’єктів» №210-63, 2021 — 2025 р. р. (держ. реєстрації 0122U002161).

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є створення моделей та методів числового моделювання динамічних станів пароріднних двофазних систем — ґрунтуючись на підході узагальнення, а також у розробці інструментальних програмно-алгоритмічних засобів моделювання, які забезпечують конструктивний розв'язок задач в практиці досліджень та інженерних розрахунків для широкої гами енергетичних процесів і об'єктів природного походження та технологічного призначення.

Для досягнення вказаної мети дослідження в дисертаційній роботі було **поставлено** та **розв'язано наступні задачі**:

— систематизовано і виділено особливості прояву динаміки пароріднних двофазних систем на основі аналізу поширених промислово важливих технологій та природних явищ;

— визначено проблематику основних задач моделювання та ідентифікації динамічних станів пароріднних двофазних систем;

— обґрунтовано підходи до математичної формалізації динамічних станів пароріднних двофазних систем, заснованих на застосуванні диференційних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) та варіаційних нерівностей у частинних похідних (ВНЧП), відповідно у випадках рівновагових та нерівновагових динамічних станів;

— розроблено математичні моделі (ММ) динамічних станів пароріднних двофазних систем, що являють собою крайові задачі для відповідних ДРЧП та ВНЧП, виконано узагальнення та аналіз якісних характеристик отриманих моделей;

— розроблено дискретні ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем, що враховують їх (станів) основні якісні властивості та ґрунтуються на економічних різницевих схемах, а також методи числової реалізації цих моделей;

— розроблено інструментальні програмно-алгоритмічні засоби (ІПАЗ) комп'ютерного моделювання динамічних станів пароріднних двофазних систем; визначено коректність і адекватність модельної підтримки відповідних ІПАЗ та

оцінено їх (засобів) прикладні можливості на прикладах реальних інженерних задач.

Об'єктом досліджень є процеси моделювання рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем.

Предметом досліджень є математичні моделі типових випадків динамічних станів пароріднинних двофазних систем та обчислювальні методи їх числової та комп'ютерної реалізації.

Методи досліджень. В дисертаційній роботі використано положення теорій: числового аналізу; рівнянь математичної фізики; оптимального управління; методи організації комп'ютерних засобів моделювання та обчислювального експерименту. Для підтвердження достовірності отриманих теоретичних результатів було застосовано комп'ютерне моделювання з використанням пакету Scilab (http://scilab.org/download/6.0.2), який є таким, що вільно розповсюджуються.

Наукова новизна результатів, які виносяться на захист, полягає в тому, що ***вперше****:*

— запропоновано нестаціонарі та нелінійні ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем (у вигляді відповідних ДРЧП та ВНЧП), які отримано на основі фундаментальних законів фізики, що забезпечує адекватність цих моделей у широкому діапазоні змін параметрів двофазного середовища, на відміну від існуючих емпіричних та рекурентних ММ;

— виконано узагальнення ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем, що дозволило поставити та розв'язати задачу пошуку методів реалізації ММ поширених (типових у практичних застосунках) динамічних станів пароріднинних двофазних систем ґрунтуючись на підході уніфікації;

— запропоновано методи обчислювальної реалізації узагальнених ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем, причому, в першому випадку, метод полягає у дискретизації неперервних

ММ за явно-неявною схемою та наступному розв’язуванні результуючої системи дискретних алгебраїчних рівнянь за ітераційним процесом Зейделя, а у другому — метод полягає у розв’язуванні оптимізаційної задачі і зводиться до пошуку максимуму функції Гамільтона, записаної для розширеної узагальненої ММ досліджуваного динамічного стану. Дані методи дозволяють скоротити обчислювальні витрати при числовій реалізації дискретних аналогів неперервних ММ за рахунок застосування економічних різницевих схем.

Практична цінність роботи полягає в тому, що запропоновані моделі, методи та засоби моделювання дозволяють розширити клас важливих для практики задач дослідження динамічних станів пароріднинних двофазних систем, а також створено комплекс ІПАЗ розв’язування прикладних задач моделювання останніх (зокрема, виникнення і розвитку хвильового режиму, бульбашкового режиму та формування границі розділу компонент у рідинній складовій).

Застосування комплексу ІПАЗ забезпечує скорочення часу моделювання в $(1{,}2...1{,}4)$ рази за рахунок автоматизації процедур обчислювального процесу.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, використано при розробці лекційних курсів (і відповідних циклів лабораторних робіт) з дисциплін; «Автоматизація виробничих процесів», «Автоматизація проектування систем управління», «Моделювання систем і технологічних процесів», які поставлено і читаються на кафедрі комп’ютеризованих систем і програмних технологій Національного університету «Одеська політехніка».

Особистий внесок здобувача в працях, опублікованих із співавторами. Наукові положення, висновки та рекомендації, які викладено у дисертаційній роботі, і які виносяться на захист, отримано особисто здобувачем та узагальнено під час оформлення дисертаційної роботи. Наукові праці [16 — 21] виконано автором самостійно. В працях, опублікованих у співавторстві [13 — 15, 22 — 25], автору належать вибір наукового напрямку, постановка задач та способи їх розв’язування, теоретичне обґрунтування методології та інтерпретація результатів досліджень. Зокрема, автору належать:

— в [13, 14] — ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем;

— в [15] — ММ динамічних станів пароріднинних двофазних систем в режимі утворення ударних хвиль;

— в [24] — ММ нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем в режимі утворення ударних хвиль;

— в [22, 23] — числова реалізація ММ динамічних систем;

— в [25] — ММ гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи.

Апробація результатів дисертаційної роботи. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися на наукових семінарах кафедри комп'ютеризованих систем управління ОНПУ (з 2021 р. — кафедри комп'ютеризованих систем та програмних технологій Національного університету «Одеська політехніка»), Одеса, 2020 — 2024 р. р.; на VIII Міжнародній науково-практичній конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів» (Черкаси, 2021 р.); на XII та XIII Міжнародних наукових конференціях студентів та молодих вчених «Сучасні інформаційні технології — 2022 (МІТ-2022)» і «Сучасні інформаційні технології — 2023 (МІТ-2023)» (Одеса, 2022 р. і 2023 р.).

Публікації. Основні наукові результати дисертаційної роботи викладено у 13-ти наукових роботах, в тому числі: у 1-й, статті, опублікованій у виданні, що проіндексовано у наукометричній базі Scopus; у 3-х статтях, які опубліковано у виданнях, включених до Переліку фахових видань України (всі видання індексуються у міжнародних наукометричних базах даних, зокрема: Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory, Electronic Journals Library, Google Scholar); у 1-й статті, яку опубліковано у зарубіжному виданні, а також у 8-ми тезах Міжнародних наукових конференцій (матеріали однієї з яких проіндексовано у наукометричній базі Scopus).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаної літератури зі 167 найменувань (на 19 сторінках), 3 додатків (на 10 сторінках), 23 рисунків та 3 таблиць. Загальний обсяг дисертаційної роботи складає 205 сторінок, в тому числі 176 сторінок основного тексту.

РОЗДІЛ 1. СТАН ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ТА МАШИННИХ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ

1.1. Фізичні явища утворення та існування пароріднної рівноваги. Задачі моделювання та ідентифікації

Пароріднні системи (інакше, *суміші* — англ. *liquid-vapor mixture*) являють собою рідинну та газоподібну фази (тобто є *двофазними системами*) однієї речовини або азеотропну суміш — як правила при насиченні [26].

Якщо рідина кипить а не випаровується, то пар відокремлює маленькі крапельки *насиченої рідини* та відносить їх догори. Таке явище носить назву *«вологий»* пар від киплячої рідини. Сам пар в такому разі є невидимим, оскільки окремі молекули занадто малі, щоб відбивати світло. Термін «вологий» пар використовується саме для позначення пару, який захоплює крапельки рідини. Насичений пар, повністю вільний від часток рідини, називається *«сухий»*.

При випаровуванні рідини її маса зменшується, а маса пару збільшується. Іншими словами, процес починається з 0% маси у вигляді пару, а закінчується, коли 100% маси речовини становить пар (тобто спостерігається повне випаровування). Перебіг цього процесу визначає відсоток маси рідини. яка перетворилася на пар. Зазначена величина носить назву «*якості*» процесу перетворення, і позначається літерою x. Якість процесу перетворення x використовується у розрахунках, наприклад, обчислення *ентальпії* процесу, питомого об'єму та густини (пароріднної системи). Враховуючи, що будь-який вологий пар (пароріднна суміш) існує в стані насиченості, її (суміші) температура завжди буде дорівнювати температурі насиченості, згідно тиску.

При розгляді фізичних явищ, які зумовлюють зародження, існування та еволюційні перетворення пароріднних сумішей, важливим моментом є

дослідження та формалізація основних закономірностей формування і розвитку нерівновагових двофазних потоків системи «рідина — пар».

Так в практичних задачах, пов’язаних з плином двофазних (пароріднинних) систем, важливим є визначення місця виникнення рідкої фази, а також вплив вологи, яка виникає, на величину наступної нерівноваговості потоку, його енергетичні та витратні характеристики.

1. Процеси виникнення рідкої фази. В теорії тепло- та масообмінних процесів плину пароріднинної двофазної суміші важливим є питання щодо виникнення рідкої фази. При цьому визначальними слід розглядати умови або, інакше, теплофізичні характеристики, за яких виникає *конденсація* (тобто — суть початок утворення рідкої фази) та подальше утворення рідинних плівок. Необхідно відзначити, що переважний механізм утворення рідкої фази (за виключенням незначної долі конденсації пару на поверхні) — це *спонтанна конденсація*. Одначе її фізичні форми (прояви) різноманітні, в залежності від параметрів пару (зокрема, температури, тиску, концентрації тощо), чисел Маха — M та Рейнольдса — Re, геометричних характеристик каналів, в яких відбувається плин пароріднинної суміші. В залежності від фізичних проявів конденсації міняються число та розміри крапель рідини, які утворюється. Дослідження утворення рідкої фази (для конкретності, на прикладі турбінного обладнання) дозволяють зробити наступні висновки:

— виникнення рідкої фази при низьких тисках та значних (близьких до надзвукових) швидкостях потоку відбувається спонтанно в ядрі потоку та характеризується малими за розмірами краплями, що рухаються з малим ковзанням по відношенню до парової фази;

— спонтанна конденсація пару можлива при високих тисках (для деяких робочих тіл при в’язких тисках, наприклад, для парів натрію, калію та інших лужних металів);

— конденсація пару можлива, зокрема, у «закромочних» вихрових слідах різних турбінних решіток (соплових, що обертаються, та нерухомих — робочих),

у кінцевих вихорах, а також у «відривних» областях як в зоні високих, так і, особливо, низьких тисків.

Важливу роль в утворенні рідкої фази грає висока турбулентність потоку, а також періодична нестаціонарність, що створює хвилі розрідження та стискання, які перемежовуються. Розглянемо квазіодновимірний плин двофазної суміші. В цьому випадку система рівнянь містить в собі рівняння нерозривності, імпульсу, енергії, фазових перетворень та теплообміну [2]:

$$\frac{d(\rho_1, C_1, F)}{dz} = -\chi F, \tag{1.1}$$

$$\rho_1 C_1 \frac{dC_1}{dz} = -\frac{dP}{dz}, \tag{1.2}$$

$$\rho_1 C_1 \frac{dC_1}{dz}\left(i + \frac{C_1}{2}\right) = \chi(i_1 - i_3) + q, \tag{1.3}$$

$$\chi = \frac{1}{F}\int_{z_0}^{z}\left[J^2(\xi)\frac{dm(\xi, z)}{dz}\right]d\xi, \tag{1.4}$$

$$q_0 = \int_{z_0}^{z}\left[J(\xi)q_1(\xi, z)\frac{F(\xi)C_1(\xi)}{F(\xi) - C_1(\xi)}\right]d\xi, \tag{1.5}$$

$$J(\xi) = \left(\frac{P}{K^* T}\right)^2 \frac{\alpha}{\rho^2}\sqrt{\frac{2\sigma m_0}{\pi}}\exp\left(-\beta\frac{\Delta W_*}{K^* T}\right), \tag{1.6}$$

$$\frac{dm(\xi, z)}{dz} - \frac{4\pi\alpha_k r^2(\xi, z)P}{C_1\sqrt{2\pi RT}}\left(1 - \frac{P_{s,r}}{P}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right), \tag{1.7}$$

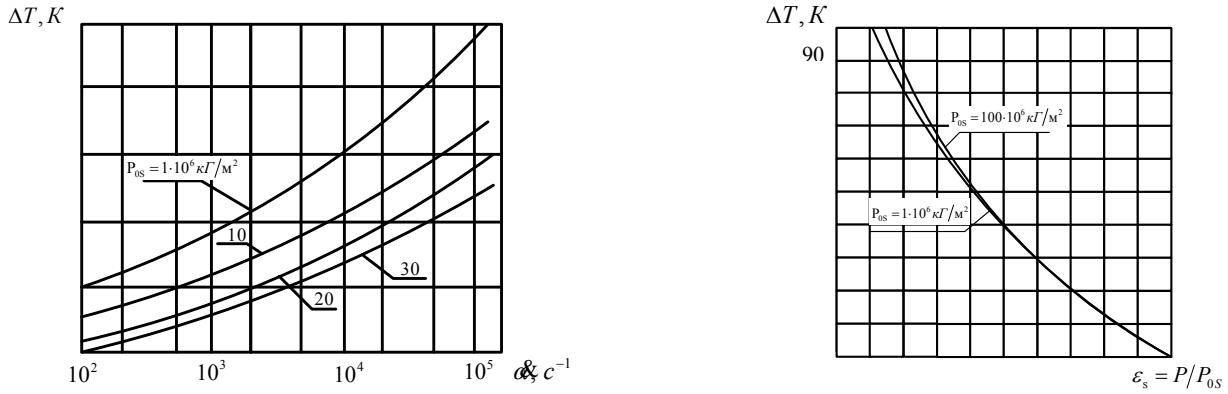
$$q(\xi, z) - 4\pi r^2 \rho_1 \alpha_1 \sqrt{\frac{2RT}{\pi}} R\frac{K+1}{K-1}(T_1 - T_2), \tag{1.8}$$

де $\Delta W_* = 4\pi\sigma r_*^2$; $r_* = \dfrac{\sigma T_s}{\rho\alpha\Delta T}$.

Теоретичні залежності (1.1) — (1.8) можуть зазнавати корекції внаслідок досліджень спонтанної конденсації, спричиненої розбіжністю геометричних параметрів каналів, в яких відбувається плин двофазної суміші. Поправочні

коефіцієнти при цьому, із задовільною точністю, можуть приймати такі значення: $\alpha = 1;\ \beta = \chi(\varepsilon)^{1/3};\ \varepsilon = \left(P_{0s} / P_{\text{кр}}\right)$.

Спонтанна конденсація пара наступає при досягненні граничного переохолодження $\Delta T_{\text{М}}$, залежність якого від швидкості розширення $\alpha = -\left(C\, dP / P\, dz\right)$ та початкового тиску P_{0s} представлена на рис. 1.1,а. Взаємозв'язок між відношенням тиску $\varepsilon = \left(P_{0s} / P_{\text{кр}}\right)$ та величиною переохолодження ΔT (на прикладі водяного пару) може бути визначено по рис. 1.1,б.



а) б)

Рис. 1.1. — Залежність переохолодження в конфузорному потоці пара:

а) — від швидкості розширення α і початкового тиску P_{0s};

б) — від відношення тисків при нерівномірному процесі розширення

Розміри рідинних часток визначаються у відповідності до рис. 1.2 із уявлення про рівноваговий стан середовища після завершення процесу спонтанної конденсації у відповідності до відомого співвідношення тисків.

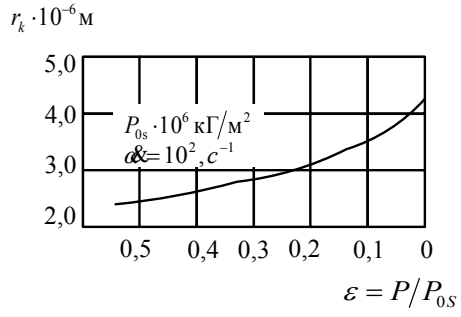


Рис. 1.2. — Радіус крапель при спонтанній конденсації в ядрі потоку

Зростання крапель у процесі подальшого розширення за рахунок конденсації визначається за наступною залежністю:

$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}}, \tag{1.9}$$

де r_1 та r_2 — радіуси крапель у точках, що відповідають виникненню вологи та завершенню процесу розширення; y_1, y_2 та ρ_1, ρ_2 — ступені вологості та густини рідини для вказаних точок, відповідно.

Як випливає з експериментальних та теоретичних досліджень бурна конденсація пару може наступати при достатньо малих переохолодженнях ΔT, коли в потоці формується значна кількість вихорів або значні турбулентні пульсації параметрів пару. Це пов'язано з тим, що у вихорах виникає місцеве додаткове зниження температури і, відповідно, значне переохолодження пару [28, 29]. Експериментальні дослідження конденсації на оберненій моделі турбінної ступені (соплова решітка, що обертається, та нерухома робоча решітка) показали, що вже при переохолодженні пара за сопловою решіткою $\Delta T = 5^{\circ} C$ має місце практично повна конденсація пару за робочою решіткою. Теоретичне визначення характеристик конденсату, який утворюється у «закромочних» слідах, пов'язано із занадто трудомісткими математичними розрахунками. Для орієнтовних підрахунків можна скористатися системою рівнянь [28], яка дозволяє з достатньою точністю визначити розподіл у просторі та часі тиску P, температури T, переохолодження $(T_s - T)$, а також щільності розподілу часток вологи по їх розмірах у «закромочних» слідах:

$$u = \frac{r}{2\pi R}\left\{1 - \exp\left[\frac{R^2}{4\upsilon(\tau_1 + \tau)}\right]\right\}, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \rho \frac{u^2}{r}, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho C_v} \cdot \frac{1}{R}\left(r \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R}\left[Ru\left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right] - \frac{1}{C_v} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{u^2}{R} \right)^2, \qquad (1.12)$$

$$J = \frac{\alpha R}{kT} \cdot \sqrt{\frac{2\sigma m}{\pi}} \cdot \exp\left(- \frac{\beta \Delta W_*}{k_\delta T} - \frac{\lambda_2}{qT} \right), \qquad (1.13)$$

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{4\pi r^2 \rho}{\sqrt{2\pi RT}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_\sigma}} \right). \qquad (1.14)$$

Вирази (1.1) — (1.8), (1.10) — (1.14) дають змогу формалізовано представити фізичні явища, притаманні процесам виникнення рідкої фази у двофазних системах (сумішах). Ці вирази з достатньою коректністю описують місце виникнення (зародження) та дисперсність вологої (рідинної) фази. Також, в межах (1.1) — (1.8), (1.10) — (1.14), описується зростання крапель в процесі подальшої (після моменту зародження) конденсації, їх взаємодія з поверхнями (стінками) каналів, в яких відбувається плин двофазного потоку, а також утворення крупно дисперсної вологи.

2. Процеси еволюції парорідинного двофазного потоку. Дрібнодисперсна волога, яка виникає в результаті спонтанної конденсації, слугує ядрами наступної стадії конденсації, що характерна для подальшого розширення — двофазного середовища. В залежності від початкової вологості y_1, дисперсності r_1 (концентрації N_1) та градієнтів швидкостей & ступінь нерівноваговості буде різною. Покладаючи для малих $r_1 \le 10^6$ м рівність швидкостей фаз $C_1 = C_2$ та нехтуючи об'ємною концентрацією крапель, для дослідження тепло- та масообміну в двофазному потоці можна скористатися системою рівнянь (1.1) — (1.3). Одначе під *швидкістю фазових переходів* слід розуміти суму швидкостей від конденсації χ_1 на ядрах, які знову утворюються (рівняння (1.4)), та конденсації $\chi_2 = \left(N_0 dm/d\tau \right)$ на наявних в потоці рідинних частках (рівняння (1.14)). Аналогічно (враховуючи вище уведену позначку q), для швидкості теплообміну на ядрах, що знову утворюються q_1 (рівняння (1.8)), та на тих ядрах, що вже існують в потоці $q_2 = 2\pi N_0 r_0 u\lambda\left(T_s - T \right)$, на рис. 1.3

представлено результати розв'язування системи рівнянь розподілу тиску та переохолодження для різних значень концентрації N_0 при розширенні у надзвуковому каналі з постійною швидкістю $\dot{\omega} = [-d\ln(P)/dt]$. По осі абсцис відкладено безрозмірна швидкість $\lambda = C/\alpha_*$ ідеального газу з показником ізоентропії $k = 1{,}3$, який розширюється у тому ж каналі.

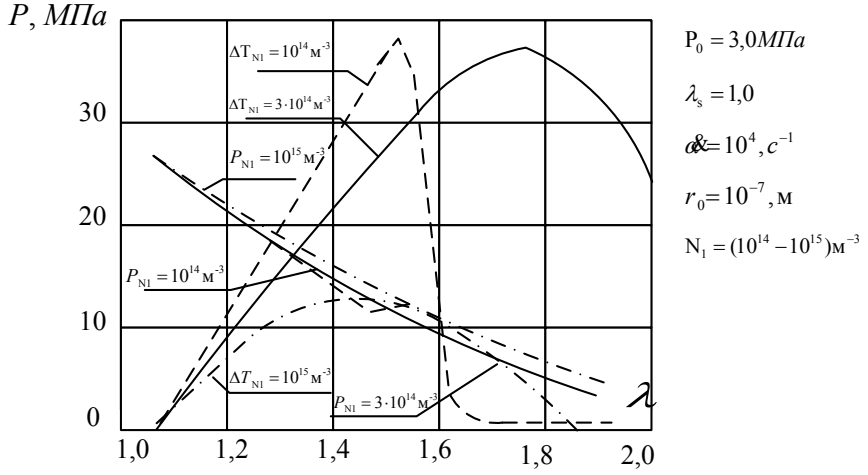


Рис. 1.3. — Розподіл тиску та переохолодження для різних значень концентрації N_0

З цих результатів випливає, що наявність початкової вологості спричиняє зміщення точки максимального переохолодження, а також зміну градієнтів тиску та переохолодження. При постійних радіусах крапель та режимних умовах ($\dot{\omega} = \text{const}, \lambda_s = \text{const}, P = \text{const}$) зі зростанням концентрації максимальне значення переохолодження зменшується, зміщуючись, спочатку, по потоку, а, надалі, — проти потоку; при цьому градієнт переохолодження та тиску безперервно зменшуються. Аналогічна картина спостерігається і при змінних радіусах каналів та постійній концентрації (рис. 1.4). Це пояснюється тим, що явища фазових перетворень та теплообміну між паром та початковою вологою стають настільки інтенсивними, що вони не тільки зменшують темпи зростання переохолодження, але й визначають собою розвиток всього процесу. Пересування по потоку йде до тих пір, поки вплив від фазових перетворень і від темпу теплообміну не стають сумірними з геометричним впливом.

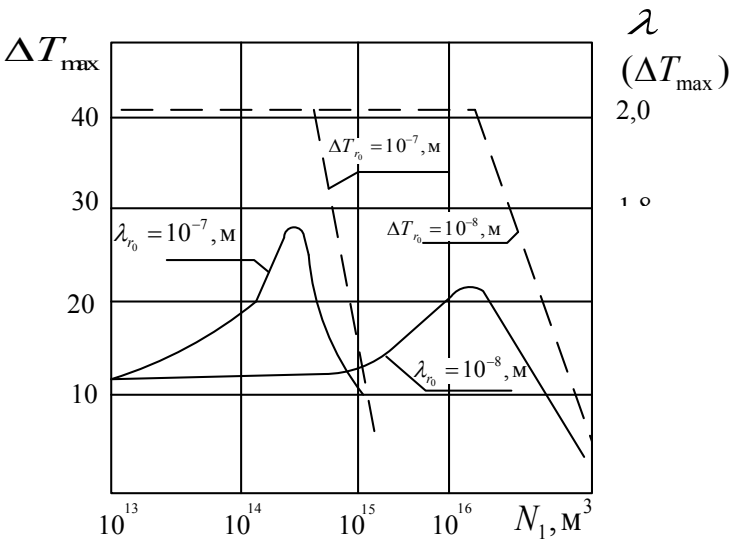


Рис. 1.4. — Зміна максимального переохолодження від розмірів та концентрації рідинних часток

Таким чином, наявність незначної початкової вологи не виключає появи «стрибка» конденсації, а лише зсуває його донизу по потоку, оскільки темп зростання переохолодження уповільнюється і величина максимального переохолодження, яка визначає інтенсивність «стрибка» концентрації, зсувається донизу по потоку. Аналогічна фізична картина впливу початкової вологи на розподіл параметрів двофазного потоку спостерігається при змінних початкових розмірах крапель, концентрації та швидкості розширення (пару).

3. Витратні характеристики двофазних потоків. Витратні характеристики переохолодженого пару суттєво відрізняються від витрат при гранично рівноваговому процесі розширенні середовища. Якщо початок процесу лежить в області перегрітого пару або на лінії насичення, то при будь-яких перепадах тепла для початкового тиску $P < (4{,}0 ..., 5{,}0)$ МПа спонтанна конденсація починається за мінімальним перерізом каналу, в якому рухається двофазний потік (наприклад, мінімальним перерізом сопла турбіни). Таким чином, в мінімальному перерізі пар завжди є переохолодженим.

Знаючи тиск в мінімальному перерізі можна визначити переохолодження пару ΔT (рис. 1.1, б) і приблизно оцінити істинну витрату

$$G = G_{\text{р}}\sqrt{1+\left(\Delta T/T\right)}, \qquad (1.15)$$

де $G_{\text{р}}$ — витрата, підрахована за припущення про рівновагового процесу розширення, T — температура у мінімальному перерізі каналу.

Із зростанням початкового тиску зона спонтанної конденсації пересувається до мінімального перерізу, а величина максимального переохолодження ΔT — зменшується. Можна очікувати, що, наприклад, для водяного пару при початковому тиску $P_0 > \left(5{,}0...,6{,}0\right)$ МПа, а для інших робочих тіл (зокрема, калію) і при менших тисках, спонтанна конденсація пересувається у частину каналу, яка звужується. Пересування початку конденсації всередину каналу можливо тільки за умови, якщо пар перед характерною ділянкою каналу (наприклад, соплом турбіни) з тих або інших причин виявляється вже переохолодженим. Для цих випадків розрахунок витратних характеристик ускладнений у зв'язку з можливим виникненням нестаціонарних пульсацій параметрів потоку і виникненням додаткового теплового опору, що знижує на $\left(3...5\right)\%$ дійсну витрату G у порівнянні із рівноваговою витратою $G_{\text{р}}$. Враховуючи зростання витрати переохолодженого пару на $\left(3...4\right)\%$ (вираз (1.15)), сумарне коливання витрати при пересуванні зони конденсації з ділянки розширення каналу у ділянку звуження (наприклад, у сопло турбіни) складає $\left(6...9\right)\%$. При наявності на вході в канал початкової вологи коефіцієнт витрати $\mu = \left(G/G_{\text{р}}\right)$ суттєво залежить від ступеню вологості y_0, перепаду тиску ε та дисперсності рідинної фази r_2. Характер зміни $\mu_{\text{вол}}$ в залежності від ε та r_2 проілюстровано на рис. 1.5.

Як випливає з наведених результатів, дійсна витрата двофазної суміші перевищує рівновагову витрату $(\Delta\mu > 0)$ у зв'язку з незавершеністю процесів тепло- та масообміну. Зі зростанням розмірів частинок конденсату ступінь нерівноваговості двофазової системи збільшується, що спричиняє зростання $\Delta\mu$. Аналогічний вплив спричиняє збільшення початкового ступеню вологості. Зі

зростанням тиску процеси міжфазової взаємодії перебігають більш рівновагого, що призводить до зменшення $\Delta\mu$.

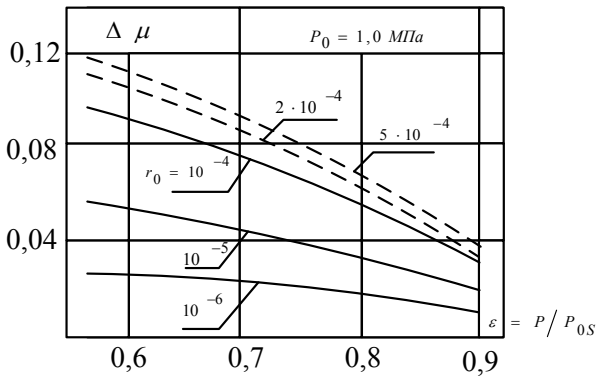


Рис. 1.5. — Прирощення коефіцієнта витрати в залежності від відношення тиску і розміру крапель

Розв’язати задачу отримання надійних (коректних) даних щодо динаміки пароріднинних систем можна зіставляючи *натурний* (суть — *фізичний*) експеримент та обчислювальний експеримент, який виконується за допомогою методів та засобів *математичного моделювання*.

При використанні математичного моделювання, як методології наукового дослідження, слід виокремити дві його складові:

— реалізація наявної ММ (тобто розв’язування математичних виразів, які складають наявну ММ досліджуваних процесів (об’єктів), в результаті чого можна отримати їх динамічні характеристики), що застосовується в разі, якщо ММ задано або обрано апріорно, тобто досліджуваний фізичний процес (або об’єкт) вважається описаним (формалізованим);

— ідентифікація досліджуваного процесу (об’єкту), метою якої є отримання ММ останніх. Очевидно, що після ідентифікації досліджуваний процес (об’єкт) вважається описаним (формалізованим) у вигляді відповідної ММ, яку може бути реалізовано щодо отримання динамічних характеристик.

Також необхідно зазначити, що в залежності від наявної інформації про досліджуваний процес (об’єкт) розрізняється ідентифікація у вузькому та у широкому смислах. Ідентифікація у вузькому смислі (або *параметрична*

ідентифікація) полягає у оцінюванні параметрів ММ, коли її структуру (тобто вид математичних залежностей) задано по апріорній інформації. Задача ідентифікації у широкому смислі постає тоді, коли апріорна інформація щодо структури процесу (об'єкта) відсутня або недостатня, і полягає (задача) не тільки в оцінюванні параметрів ММ, але й у встановленні структури ММ (тобто *структурна ідентифікація*).

В ході математичного моделювання, зокрема динамічних станів досліджуваних в чинній дисертації пароріднинних двофазних систем, можуть бути застосовані наступні підходи, що ґрунтуються на наявній інформації про перебіг фізичних явищ в системі та інтерпретації експериментів (*параметричні* методи).

1.Побудова моделей з фізичної точки зору, заснована на безпосередньому аналізі фізичних явищ, на знанні їх механізмів, на використанні законів фізики: збереження маси, енергії, імпульма тощо. Побудована на основі такого підходу ММ має, здебільшого, *теоретичний* характер, проте є достатньо строгою та коректною. Після визначення (з бажаною точністю) оцінок параметрів цієї моделі по результатах спостережень вона може вважатися *напівемпіричною* і наближеною до реальної пароріднинної системи.

У відповідності до цього підходу будуються ММ в разі, коли з високим ступенем строгості можна описати динаміку фізичного процесу в двофазній пароріднинній системі.

2.Побудова *емпіричних* моделей, які апроксимують експериментальні спостереження про залежність параметрів стану двофазної пароріднинної системи від факторів, що впливають на останню. Застосування цього підходу зумовлено відсутністю відомостей щодо внутрішнього механізму досліджуваної двофазної пароріднинної системи і, відповідно, неможливістю побудови теоретичної моделі. Методологічною основою такої побудови ММ є *функціональний підхід* або метод «*чорного ящика*».

Вказаний підхід широко використовується при ідентифікації досліджуваного класу систем в широкому смислі (тобто структурна ідентифікація, коли фізика динамічного процесу невідома) для розв'язування

задач оптимальної фільтрації [30 — 32], прогнозування стану [33] та управління [34, 35]. До функціонального підходу відносять також побудову моделей на основі так званих «характеризаційних результатів» математичної статистики, зокрема, моделі авторегресії в теорії часових рядів [36 — 38].

3. Складання моделей досліджуваних систем на основі комбінування або використання попередніх підходів. В чистому вигляді принцип «чорного ящика» не застосовується, оскільки завжди є певна апріорна інформація про структуру системи; часткове розуміння механізму фізичного процесу, що відбувається в системі та попередній аналіз результатів спостережень, тобто *апостеріорна інформація*.

Загалом чіткої границі між теоретичними, емпіричними та напівемпіричними ММ немає. Окрім параметричних, використовуються *непараметричні* методи моделювання та ідентифікації динамічних (в т. ч. двофазних пароріднинних) систем. Останні не використовують явно кінцевовимірного вектору параметрів при моделюванні передаточною функцією від вхідних величин до вихідних. При цьому використовуються, відомі з теорії управління [35], способи аналізу реакції на ступінчастий вплив, кореляційний аналіз, частотний аналіз, гармонійний аналіз Фур'є, спектральний аналіз. Між параметричними та непараметричними методами існує зв'язок [33], а в арсенал методів ідентифікації входять також методи *кластерного аналізу* і *комітетів* [30]. Останній розраховано на випадок «*розмитих*» задач, коли має місце суперечливість ММ та несумісність системи обмежень. Також слід мати на увазі, що по суті, математичному моделюванню передує *класифікація* [31].

Як випливає з попереднього, методи математичного моделювання пов'язано з проблемою вибору *адекватної математичної моделі* та оцінки надійності її параметрів, які, в свою чергу, дозволяють якісно та кількісно описати (у досліджуваному випадку) динамічну поведінку двофазної пароріднинної системи. *Адекватність* методів математичного моделювання при цьому можна оцінити на основі зіставлення *експериментальних* та *розрахункових* даних. Найкращим є метод, який забезпечує мінімальну похибку опису

експериментальних даних. Тому етап вибору адекватних розрахункових (математичних) методів має на меті збір інформації щодо особливостей перебігу динамічних процесів в конкретних умовах існування двофазної пароріднинної системи (зокрема, про наявність азеотропії, взаємній розчинності компонентів двофазної системи, якщо вона має фракційний склад тощо). В літературних джерелах (наприклад, [4 — 12, 26 — 29]) широко представлено дані щодо пароріднинної рівноваги у моно- та бінарних системах, які можуть використовуватися для розрахунку пароріднинної рівноваги, оскільки характеризують енергетику фазової взаємодії.

Моделювання багатофазних систем (наразі, і двофазних пароріднинних систем, які розглядаються в чинній дисертаційній роботі) являє собою не тільки науковий, але і практичний (зокрема, промисловий та технологічний) інтерес. Воно широко застосовується в нафтохімічній промисловості (процеси конденсації, ректифікації та сепарації в реакторних апаратах: ректифікаційних колонах, дистиляторах, випарках, змішувачах, дегідраторах тощо), хімічній та газовій промисловості (видалення супутніх газів та відокремлення газового конденсату від газоподібних фракцій на газових родовищах), ядерно-енергетичній промисловості (сепарація кислот у технологічних зонах), горно-добувній промисловості (переробка «трони»), біохімічні промисловості (розділення органічних солей та двофазних водних систем полімерів), екології (очищення та дегазація стічних вод) тощо.

Таким чином задачами моделювання та ідентифікації в дисертаційній роботі будуть класифікація досліджуваного класу двофазних пароріднинних систем; побудова і реалізація їх коректних ММ та проведення параметричної ідентифікації запропонованих ММ з метою забезпечення адекватності останніх умовам перебігу фізичних процесів.

1.2. Математична формалізація та обчислювальна реалізація математичних моделей динамічних станів пароріднинних двофазних систем

1.2.1. Математичні моделі динамічних станів пароріднинних двофазних систем

Гомогенна модель. Певне розповсюдження в літературі [39 — 41], як достатньо наглядний та зручний спосіб континуального представлення двофазного середовища, зокрема газо- або пароріднинної суміші, віднайшло представлення у вигляді *гомогенної моделі*. Таке трактування пароріднинних двофазних систем коректне за умови перебування останніх у *бульбашковому режимі* [42 — 45], що є достатньо характерним фізичним станом пароріднинної суміші [46, 47]. Суміш рідини та газу (пару) в даному випадку розглядається як деяке однорідне середовище із середньою температурою T, густиною ρ та тиском P. Основним припущенням даного представлення є швидкий обмін імпульсом, теплотою та масою між фазами. Внаслідок цього, температури та швидкості руху фаз вважаються такими, що дорівнюють одна одній. Вважається, що тиск у рідинній фазі P_1 або дорівнює тискові в газовій фазі P_2, або відрізняється на величину лапласівського тиску $\Delta P = 2\sigma/R$, де R — радіус бульбашок (середній), σ — коефіцієнт поверхневого напруження (тут, і подальшому, індекс 1 позначає рідку фазу, а індекс 2 — пар або газову фазу).

Якщо вважати, що парова (газова) фаза складається з бульбашок одного розміру, а кількість бульбашок N на 1 кг маси суміші не змінюється, то питомий об'єм пару (газу) в суміші буде складати $V = (3/4)\pi R^3 N$. Істинний об'ємний вміст пару (газу) φ за визначенням зв'язано з V та густиною середовища ρ наступним чином: $\varphi = V\rho$. Іноді φ визначається по-іншому: $\varphi = (3/4)\pi R^3 N\rho = (3/4)\pi R^3 n$, де $n = N\rho$ — кількість бульбашок в одиниці об'єму. На відміну від N величина n не

є постійною. Масовий паро- (газо-)вміст X визначимо через φ та густину пару (газу): $X = V\rho_2 = \varphi\rho_2/\rho$. На відміну від об'ємного масовий паро- (газо-)вміст при відсутності фазових переходів не змінюється.

Середня густина суміші (двофазної системи) уводиться через об'ємний паро- (газо-)вміст φ співвідношенням

$$\rho = \rho_1(1-\varphi) + \rho_2\varphi \tag{1.16}$$

або масовий паро- (газо-)вміст X:

$$1/\rho = (1-X)/\rho_1 + X/\rho_2 = (1-X)/\rho_1 + V. \tag{1.17}$$

Вилучивши ρ з рівняння (1.16), можна віднайти зв'язок між φ та X:

$$X = \frac{\rho_2\varphi}{\rho_2\varphi + \rho_1(1-\varphi)}.$$

Із співвідношення (1.17) можна отримати:

$$\delta V/V = \frac{\delta P(1-\varphi)^2(1-X)}{c_1^2\rho\varphi} - \frac{\delta P}{\rho\varphi} = \frac{\delta P}{\rho\varphi}\left[\frac{(1-\varphi)^2(1-X)}{c_1^2} - 1\right], \tag{1.18}$$

де c_1 — швидкість звуку у рідині. Тут використано акустичний зв'язок між збудженнями густини рідини та тиску в середовищі: $\delta\rho_1 = \delta P/c_1^2$.

Таким чином, суміш бульбашок з рідиною розглядається як деякий газ, густина якого близька до густини рідини, а стискання цього середовища визначається стисканням газової або парової фази. Можна визначити деякі основні термодинамічні характеристики цієї суміші:

— ентропія

$$s = s_1(1-X) + s_2X;$$

— ентальпія

$$h = h_1(1-X) + h_2X.$$

Для гомогенної моделі важливою властивістю є рівновага пароріджинної суміші, яку може бути порушено навіть незначними впливами та хвильовими збудженнями.

1.Поширення малих збуджень та нелінійних хвиль. Рівняння гомогенної моделі будується по аналогії з рівнянням гідрогазодинаміки однофазного середовища [48, 49] і можуть бути представлені у вигляді

$$\begin{cases} \partial\rho/\partial t + \partial(u\rho)/\partial x = 0; \\ \partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = -(1/\rho)\partial P/\partial x; \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\partial h/\partial t + u\partial h/\partial x = (1/\rho)(\partial P/\partial t + u\partial P/\partial x). \tag{1.20}$$

Тут u, ρ, P, h — відповідно швидкість, густина, тиск та ентальпія суміші.

Розповсюдження малих збуджень можна вивчати з урахуванням уявлення про *адіабатичність* процесу на основі лінійної моделі (1.19), (1.20):

$$\partial u/\partial t = -(1/\rho_0)\,\partial P/\partial x \;;\; \partial\rho/\partial t = -\rho_0\,\partial u/\partial x$$

або

$$\begin{gathered} \partial^2\rho/\partial t^2 = \partial^2 P/\partial x^2; \\ ds/dt = 0. \end{gathered} \tag{1.21}$$

При математичному описі динаміки газорідинної суміші, як і в газодинаміці, нелінійними є не тільки рівняння руху суміші (1.19), (1.20), але і рівняння стану, тобто джерело нелінійності — залежність швидкості звуку c від поточних значень збуджень швидкості. Тому тільки при нелінійному аналізі розповсюдження хвиль в рідині з бульбашками можна користуватися значенням $c = (\partial P/\partial\rho)_s^{0,5}$ при $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi_0$.

З (1.21) випливає, що

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \tag{1.22}$$

При розгляді газорідинного середовища у випадку, коли в процесі розповсюдження рідини масовий газовміст X не змінюється і зміна густини

відбувається за рахунок стискання бульбашок, для $(\partial\rho/\partial P)_s$ можна скористатися формулою Меллока [39]

$$c_{\text{м}}^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{c_2^2}{\varphi(1-\varphi)} = \frac{\gamma P}{\rho\varphi} \quad \text{(де } \gamma \text{ — показник адіабати газу)}$$

з початковими значеннями параметрів $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi_0$:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{\gamma P_0}{\rho_0\varphi_0}, \tag{1.23}$$

і (1.22) приймає вигляд лінійного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0\varphi_0}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \tag{1.24}$$

В іншому граничному випадку, коли розглядається парорідинне середовище та при розповсюдженні хвилі зміна густини відбувається виключно за рахунок зміни паровмісту X, вираз $(\partial P/\partial\rho)_s$ визначається за співвідношенням

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = c_2^2 = \frac{P_2^2 L^2}{\rho^2 C_P \overline{B}^2 T^3}, \tag{1.25}$$

де L — прихована теплота пароутворення, $P_2 = P$, $\overline{B}$ — питома газова постійна, T — поточна температура, а рівняння (1.22) набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{P_0^2 L^2}{\rho_1^2 C_{P_1} \overline{B}^2 T^3}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \tag{1.26}$$

Аналіз похідної $(\partial P/\partial\rho)_s$ можна провести на основі класичного методу переходу до нових термодинамічних змінних.. Тиск P має власні змінні (параметри) ρ та s. Переходячи до нових змінних ρ та X і використовуючи властивість якобіанів та умову калібрування термодинамічних потенціалів [48], можна отримати:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{\partial(P,s)}{\partial(\rho,s)} = \frac{\partial(P,s)}{\partial(\rho,X)}\cdot\frac{\partial(P,X)}{\partial(\rho,s)}; \tag{1.27}$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{(\partial s/\partial X)_P}{(\partial\rho/\partial P)_X(\partial s/\partial X)_P - (\partial s/\partial P)_X(\partial\rho/\partial X)_P}. \tag{1.28}$$

У пароріднному середовищі без фазових переходів $X = \text{const}$, і з (1.28) випливає

$$\left(\partial P/\partial \rho\right)_s = \left(\partial P/\partial \rho\right)_X = \gamma P/\left(\rho\varphi\right) = c_{\text{м}}^2. \tag{1.29}$$

Для пароріднного середовища, коли $\left(\partial P/\partial \rho\right)_X = 0$, тобто густина змінюється тільки за рахунок зміни X, можна записати

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = \frac{\left(\partial s/\partial X\right)_P}{-\left(\partial s/\partial P\right)_X \left(\partial \rho/\partial X\right)_P} = \frac{P^2 L^2}{\rho_1^2 C_{P_1} \overline{B}^2 T^3} = c_2^2. \tag{1.30}$$

У загальному випадку, коли зміна густини відбувається за рахунок властивості стискання та зміни X, також справедливою є формула (1.28), з якої випливає

$$c^{-2} = c_{\text{м}}^{-2} + c_2^{-2} \quad \text{або} \quad c^2 = \frac{c_{\text{м}}^2 c_2^2}{c_{\text{м}}^2 + c_2^2}, \tag{1.31}$$

де $c_{\text{м}}$ та c_2 визначаються формулами (1.29) та (1.30.)

Таким чином, якщо при розповсюдженні хвилі має місце фазовий перехід (тобто зміна X), то в рамках рівновагового підходу розповсюдження збудження відбувається зі швидкістю, близькою до c_2.

Аналіз розповсюдження нелінійних хвиль в пароріднному (газоріднному) середовищі на основі гомогенної моделі, вочевидь, аналогічний традиційному газодинамічному підходу, але, тим не менш, має особливість. Гомогенна пароріднна суміш являє собою певний *континуум*, у якому густина відповідає густині рідини, а властивість стискання — паровоій (газовій) фазі. Наслідками високого ступеню стискання є низькі значення швидкості звуку та висока нелінійність, які виникають через значну залежність $c = c\left(P\right)$ на початковій ділянці росту тиску.

2. Ударні хвилі. Газодинамічний аналіз стрибків в рамках гомогенної моделі в уявленні того, що ударні хвилі в рідині з бульбашками газу існують і є ізотермічними, було виконано в роботі [48]. Відповідно до результатів роботи [48] можна записати закони збереження маси та імпульсу на границі розриву, а саме

(для простоти запису не застосовуючи індекс «см» при позначенні паро- (газо-) рідинної суміші):

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 ; \;\; P_1 + \rho_1 u_1^2 + P_1 + \rho_2 u_2^2 . \tag{1.32}$$

Тут індекс 1 відповідає стану паро- (газо-)рідинної суміші до розриву, а індекс 2 — після розриву. Вважаючи процес стискання бульбашок ізотермічним, очевидно що $P_1 V_1 = P_2 V_2$, а враховуючи, що $V = \varphi/\rho$, можна отримати

$$P_1 / P_2 = \varphi_2 \rho_1 / \varphi_1 \rho_2 . \tag{1.33}$$

Замінюючи $u_2 = \rho_1 u_1 / \rho_2$ закон збереження імпульсу можна записати наступним чином:

$$u_1^2 = \frac{(P_1 - P_2)\rho_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_1)} . \tag{1.34}$$

Вважаючи, що рідина є такою, що не стискається, можна записати

$$(\rho_2 - \rho_1) \approx \rho_1(\varphi_1 - \varphi_2); \;\; u_1^2 = \frac{(P_1 - P_2)\rho_2}{\rho_1^2 \varphi_2 (\varphi_1/\varphi_2 - 1)} . \tag{1.35}$$

З рівняння ізотермічності видно, що $\varphi_1/\varphi_2 = (1-\varphi_1)P_2/[(1-\varphi_2)P_1]$. Підстановка останнього в (1.35), і прирівнюючи співвідношення $(1-\varphi_1)/(1-\varphi_2) \approx 1$, можна отримати $u_1^2 = (P_2 - P_1)\rho_2 P_1 / [(P_2 - P_1)\rho_1^2 \varphi_2]$. Оскільки $(1-\varphi_2) \approx 1$, $(1-\varphi_1) \approx 1$, то, виконавши заміну по (1.33), можна віднайти

$$u_1^2 = P_2 / \varphi_1 \rho_1 , \tag{1.36}$$

де P_2 — повний тиск за ударною хвилею.

У випадку, коли амплітуду ударної хвилі спрямовано до нуля, формула (1.36) переходить у вираз для квадрата швидкості звуку $c_0^2 = \gamma P_0 / \rho\varphi_0$. Співвідношення (1.36), яке зв’язує швидкість ударної хвилі з інтенсивністю стрибка, має назву формули Кемпбела-Пітчера і часто використовується при газодинамічному аналізі ударних хвиль.

Динамічна модель бульбашкової суспензії. Ефективні радіуси приєднаних мас рідини менше відстані між бульбашками, і взаємодія відбувається лише через поле тисків. Тому рівняння гідродинаміки можна замкнути рівнянням

Релея для осциляцій *одиночної бульбашки* у необмеженому об'ємі ідеальної рідини, прийнявши припущення щодо можливості заміни тиску та нескінченості тиску суміші. Таким чином, система рівнянь, що описують розповсюдження збурень складається з рівнянь руху суміші та рівняння осциляції бульбашок

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0; \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \tag{1.38}$$

$$\rho_1\left[R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] = P_2 - P_1, \tag{1.39}$$

де P — тиск, під яким перебуває газорідинна суміш, u — швидкість руху газорідинної суміші , R — радіус бульбашок, ρ_i — густина ($i = 1, 2$, де індексу 1 відповідає рідина, а індексу 2 — газ); $\rho = (1-\varphi)\rho_1 + \varphi\rho_2$ — густина суміші, $\rho_1 = \text{const}$ (φ — об'ємний газовміст).

Властивість стискання суміші у ММ (1.37) — (1.39) визначається властивістю стискання газу, який перебуває у бульбашках, а осциляції радіуса бульбашок R визначається інерцією приєднаної маси рідини та різницею тисків $\Delta P = P_2 - P_1$.

При достатньо великому числі бульбашок можна прийняти також, що їх число в одиниці маси суміші N залишається постійним. Тоді об'єм газу в одиниці маси суміші V, радіус бульбашок R, густина суміші ρ, об'ємний газовміст φ та масовий газовміст X зв'язано співвідношенням [32]

$$\rho^{-1} = V + (1-X)/\rho_1;\ V = \frac{4}{3}\pi R^3 N;\ \varphi = V\rho;\ -d\rho/dt = \rho^2\, dV/dt. \tag{1.40}$$

Якщо амплітуда осциляцій радіусу бульбашок мала, що має місце при акустичних збуреннях, можна записати

$$\delta R << R_0;\ \delta P << P_0;\ dV = 4\pi R_0^2 N dR,$$

$$\frac{dR}{dt} = -\left(\frac{R_0}{3\varphi_0\rho_0}\right)\frac{d\rho}{dt};\ R\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{R_0^2}{3\varphi_0\rho_0}\cdot\frac{d^2\rho}{dt^2}. \tag{1.41}$$

Індексом 0 відмічено значення параметрів у незбудженому (вихідному $t=0$) стані. У цьому наближенні узагальнене рівняння динаміки бульбашок у ідеальній рідині набуде вигляду

$$\frac{R_0^2}{3\varphi_0}\cdot\frac{d^2\rho}{dt^2}-\frac{R_0^2}{6\varphi_0^2\rho_0}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\delta P_2=\delta P_1, \tag{1.42}$$

$\delta P_2=P_2-P_0$; $\delta P=P-P_0$; $P_0=P_{1_0}-P_{2_0}$ — тиск у не збудженій суміші. Тиск газу у бульбашці змінюється по політропі

$$P_2V_2^n=P_{2_0}V_{2_0}^n. \tag{1.43}$$

Показник ступеню, який приймає значення (у залежності від інтенсивності теплообміну між бульбашками та рідиною) от $n=\gamma=C_{P_2}/C_{V_2}$ до $n=1$ (де C_{P_2} та C_{V_2} — відповідні осциляції). Оскільки термічний опір рідини значно нижче термічного опору газу, то ступінь адіабатичності процесу залежить практично тільки від теплопровідності газу та радіусу бульбашок. Зазвичай істотне відхилення від адіабатичності спостерігається тільки у бульбашок інертних газів. Надалі приймемо $n=\gamma$.

Для малих відхилень від початкового стану з точністю до $\left(\delta V_2/V_{2_0}\right)^2$ для (1.43) справедливим є вираз

$$\delta P_2=-\gamma P_0\left(\delta V_2/V_{2_0}\right)+0{,}5\gamma(\gamma+1)P_0\left(\delta V_2/V_{2_0}\right)^2. \tag{1.44}$$

З виконанням заміни δV_2 на $\delta\rho$ з урахуванням (1.40) $\delta V_2/V_{2_0}=-\delta\rho/(\rho_0\varphi_0)$, вираз (1.44) представляється у вигляді

$$\delta P_2=c_0^2\delta\rho+\frac{(\gamma+1)c_0^2}{2\rho_0\varphi_0}(\delta\rho)^2, \tag{1.50}$$

де $c_0=\sqrt{\gamma P_0/\rho_0\varphi_0}$ — низькочастотна швидкість звуку у бульбашковому середовищі.

Таким чином, третій член рівняння (1.42) містить нелінійність, яка суттєво перевищує за значенням гідродинамічну нелінійність в (1.37). З урахуванням

домінуючого значення «бульбашкової» нелінійності [42 — 45] рівняння руху (1.37) набуває лінеаризованої форми

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial x};\ \frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1.51}$$

Також за даної умови рівняння (1.39) можна записати відносно густини суміші

$$2\beta_0 \frac{d^2\rho}{dt^2} + c_0^2 \delta\rho + Bc_0^2 (\delta\rho)^2 = \delta P, \tag{1.52}$$

де $\beta_0 = R_0^2 / 6\varphi_0(1-\varphi_0);\ B = (\gamma+1)/(2\rho_0\varphi_0)$.

Подальше перетворення рівнянь (1.51) та (1.52) дозволяє отримати наступні співвідношення:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \tag{1.53}$$

$$2\beta_0 \frac{\partial^4\rho}{\partial t^2\,\partial x^2} + c_0^2 \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \frac{\partial\rho}{\partial t^2} + Bc_0^2 \frac{\partial^2(\delta\rho^2)}{\partial t^2} = 0. \tag{1.54}$$

Перший член рівняння (1.54) відображає вплив інерції рідини та спричиняє залежність швидкості звуку від частоти накладеного збудження, останній член визначає нелінійні властивості бульбашкового середовища. Якщо дисперсійний та нелінійний ефекти малі, то в якості першого наближення можна прийняти відоме акустичне рівняння [36]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0,$$

що цілком задовольняє точності інженерних розрахунків.

Динамічна модель для середовища без дисипації енергії. У бігучій хвилі тиск та густину у першому акустичному наближенні зв’язано співвідношенням

$$\delta P \approx c_0^2 \delta\rho. \tag{1.55}$$

Якщо уявити, що в системі координат, яка рухається разом із хвилею, сигнал, за рахунок проявлення ефектів дисперсії та нелінійності деформується мало, то слід замінити у останньому нелінійному члені рівняння (1.54) $\delta\rho$ на δP у відповідності до (1.55), в результаті чого отримаємо наступне рівняння

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{B}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 (\delta\rho)^2}{\partial t^2} - 2\beta_0 \frac{\partial^4 P}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \tag{1.56}$$

яке можна ототожнити з нелінійним рівнянням Буссінеска [50]. Останнє, та його аналоги, на поточний час є найбільш ефективними моделями щодо опису процесів розповсюдження хвиль в середовищах з дисперсійними та нелінійними властивостями.

У канонічній формі рівняння Буссінеска набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 (\delta P)^2}{\partial x^2} - 2\beta_0 \frac{\partial^4 P}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \tag{1.57}$$

При заміні в малому дисперсійному члені другої похідної по t у відповідності з акустичним рівнянням можна отримати іншу форму рівняння Буссінеска

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 (\delta P)^2}{\partial x^2} - 2\beta_0 c_0^2 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = 0. \tag{1.58}$$

Хвильові члени цього рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x}\right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x}\right). \tag{1.59}$$

Якщо хвиля розповсюджується в один бік і слабко деформується в системі відліку, що рухається зі швидкістю c_0, то $\partial/\partial t = -c_0\, \partial/\partial x$.

Відповідно рівняння Буссінеска можна перетворити у наступне:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\gamma + 1}{2\varphi_0 \rho_0 c_0} \delta P \frac{\partial P}{\partial x} - \beta_0 \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} = 0 \tag{1.60}$$

або, знову скориставшись співвідношенням $\partial/\partial t = -c_0\, \partial/\partial x$, привести до рівняння наступного виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} c_0 \frac{\delta P}{P_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \beta_0 c_0 \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} = 0. \tag{1.61}$$

В системі координат t, $\xi = x - c_0 t$ рівняння (1.61) перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \cdot \frac{\partial P}{P_0} c_0 \frac{\partial P}{\partial \xi} + \beta_0 c_0 \frac{\partial^3 P}{\partial \xi^3} = 0 \tag{1.62}$$

або у безрозмірній формі

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \tau} + \overline{P}\,\frac{\partial \overline{P}}{\partial \xi} + \frac{\beta_0 c_0}{l_0^2 U_0} \cdot \frac{\partial^3 \overline{P}}{\partial \xi^3} = 0. \qquad (1.63)$$

В якості масштабів тут прийнято: l_0, δP_0 — ширина та інтенсивність (амплітуда) початкового збурення; $U_0 = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \cdot \frac{\delta P_0}{P_0} c_0$ — масштабна швидкість.

Запишемо (1.61) у лінійній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0;\ \beta = \beta_0 c_0, \qquad (1.64)$$

де $c_0 = \sqrt{(\gamma P_0)/[\rho_2 \varphi_0 (1-\varphi_0)]}$ — адіабатична швидкість звуку. Обчислимо дисперсійне співвідношення, представивши розв'язок у вигляді монохроматичної хвилі

$$u = A \exp[i(kx - \omega t)], \qquad (1.65)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ — хвильове число, λ — довжина хвилі, ω — частота розповсюдження хвилі. Отримаємо

$$-i\omega + ic_0 k - i\beta k^3 = 0;\ \omega = c_0 k - \beta k^3. \qquad (1.66)$$

Фазова та групова швидкості хвилі визначаються формулами

$$c_\text{ф} = \omega/k = c_0 - \beta k^2;\ c_\text{г} = d\omega/dk = c_0 - 3\beta k^2. \qquad (1.67)$$

Залежність фазової швидкості від частоти можна записати у вигляді $\omega = c_\text{ф}\sqrt{(c_0 - c_\text{ф})/\beta}$. Вона характеризує дисперсійні властивості бульбашкового середовища, які спричиняють появу цікавих ефектів при розповсюдженні збурень. Зокрема, в системі, яка характеризується дисперсією, кожна з компонент Фурьє довільного початкового імпульсу розповсюджується з власною швидкістю і форма сигналів змінюється у процесі руху.

Розглянемо хвилю $f = A\cos(kx - \omega t)$, яка прогресує. Уявімо, що в середовищі розповсюджуються збурення f_1 з хвильовим числом $k_1 = k + \Delta k$ та f_2

з хвильовим числом $k_2 = k - \Delta k$, а дисперсійне співвідношення має вигляд $\omega = W(k)$. Тоді

$$\omega + \Delta\omega = \omega + \Delta k \cdot (dW/dk),\ \Delta\omega = c\Delta k, \tag{1.68}$$

а вирази для f_1 та f_2 запишуться наступним чином

$$f_1 = A[\cos(kx - \omega t)\cos(\Delta k(x - ct)) - \sin(kx - \omega t)\sin(\Delta k(x - ct))], \tag{1.69}$$

$$f_2 = A[\cos(kx - \omega t)\cos(\Delta k(x - ct)) + \sin(kx - \omega t)\sin(\Delta k(x - ct))]. \tag{1.70}$$

Суперпозиція цих двох розв'язків має вигляд

$$f_1 + f_2 = 2A\cos(kx - \omega t)\cos(\Delta k)(x - ct). \tag{1.71}$$

Початкове збурення кінцевої тривалості (рис. 1.6) в середовищі з дисперсією, в тому числі і в бульбашковій, при достатньо великих розповсюдженнях у часі приймає, зазвичай, форму хвильового пакету з сильно осцилюючою амплітудою в середині пакету.

Рівняння $\partial u/\partial t + \beta(\partial^3 u/\partial \xi^3) = 0$ при великих значеннях часу для початкового, затухаючого при $\xi = \pm\infty$ збуреннях, має асимптотичний розв'язок виду

$$u = \pi^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m P_m}{m!} (3\beta t)^{-(m+1)/3}\, \mathrm{Ai}^m(\eta), \tag{1.72}$$

де

$$\eta = \xi/(3\beta t)^{1/3};\ P_m = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^m u(\xi, 0)\, d\xi; \tag{1.73}$$

$u(\xi, 0)$ — початковий розподіл; $\mathrm{Ai}^m(\eta)$ — похідні m-го порядку від функції Ейрі [49] $\mathrm{Ai}^m(\eta) = (\pi^{-1/2}) \int_0^{\infty} \cos(W^3/3 + W\eta)\, dW$. При $\eta \le 1$ і більших у розв'язку можна обмежитись першим членом ряду ($m = 0$)

$$u = \pi^{-1/2}\, P_0\, \mathrm{Ai}^m(\eta)/(3\beta t)^{-1/3}. \tag{1.74}$$

Загальний вид розв'язку (31) зображено на рис. 1.7.

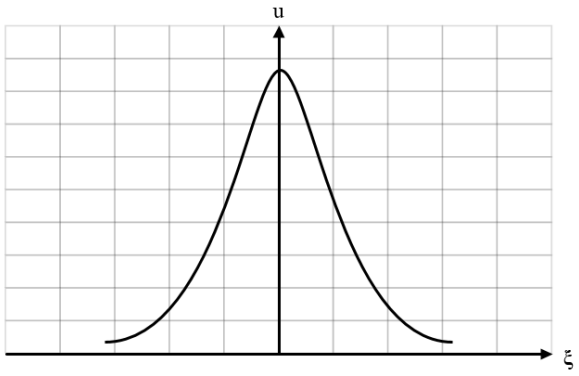


Рис. 1.6. — Початкове збудження на двофазну систему

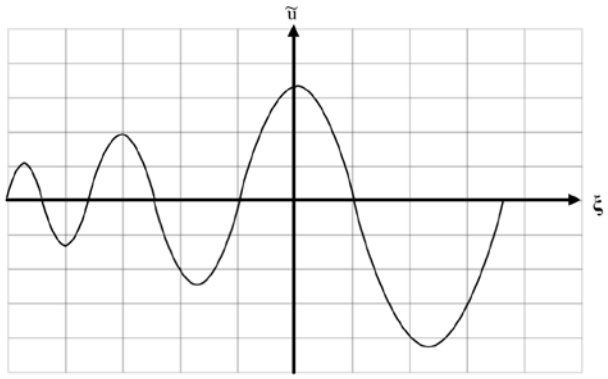


Рис. 1.7. — Розвиток хвилі в двофазній системі з дисперсією

Числові дослідження показали, що нелінійне рівняння (1.64) має деякі цікаві розв'язки у вигляді стаціонарних хвиль, які розповсюджуються з постійною швидкістю без зміни форми. Такий розв'язок можна віднайти, уводячи нову незалежну змінну $\xi_1 = \xi - v_1 t$ та приймаючи, що $u(\xi, t) = u(\xi - v_1 t)$. Значення v_1 повинно визначатися у процесі розв'язування. Після заміни можна отримати рівняння

$$\beta \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = (u - v_1) \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \tag{1.75}$$

інтегрування якого дає

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} = \left(u^2/2\right) - v_1 u + C_1/2. \tag{1.76}$$

Множення останнього рівняння на u і, і наступне інтегрування, дає результат

$$(du/d\xi)^2 = \left[\left(u^3/3\right) - v_1 u^2 + C_1 u + C_2\right]/\beta, \tag{1.77}$$

тут C_i $(i = 1, 2)$ — постійні інтегрування. Дійсні розв'язки існують, якщо поліном додатний або дорівнює нулю.

Динамічна модель для середовища з дисипативним ефектом. Аналіз поведінки хвилі збудженню тиску та бульбашкової фази також може бути проведений на основі рівняння виду Буссінеска (наприклад, раніше отриманого рівняння (1.58)). Для випадку, що розглядається, реальні бульбашкові середовища характеризуються суттєвими дисипативними втратами, основні з яких пов'язано з

розсіянням енергії при стисканні та розширенні бульбашок газу (пари). Врахування густинної дисипації при радіальному русі веде до появи в рівнянні Релея [51 — 53] додаткового члена $4(\nu_1/R)dR/dt$, де ν_1 — гідродинамічна густина рідини. Крім того, бульбашка у хвилі при русі випромінює звук, що призводить до перевипромінювання стислої області суміші в оточуючу не збуджену суміш та до дисипації енергії у хвилі.

Ці ефекти можна врахувати на основі наближення Херрінга-Флінна [54], що приведе до рівняння наступного виду

$$R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\nu_1}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{\rho c_1}\left(\frac{dR}{dt}\right)\frac{dR}{dt}=\frac{1}{\rho_1}\left(P_2-P_1\right), \quad (1.78)$$

де c_1 — швидкість звуку в рідині.

Переходячи від радіусу бульбашки до щільності суміші, можна записати наближене рівняння для зв'язку тиску та щільності

$$\frac{R_0^2}{3\varphi_0}\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{4\nu_1}{3\varphi_0}\frac{d\rho}{dt}+\frac{R_0c_0^2}{c_1}\frac{d\rho}{dt}+c_0^2(1+B\delta\rho)\delta\rho=\delta\rho_\infty, \quad (1.79)$$

в якому нелінійність зберігається в останньому члені лівої частини рівняння.

Уведення $\nu_г=4\nu_1/3\varphi_0$ — параметру, який характеризує гідродинамічну густину бульбашкової системи; $\nu_{ак}=R_0c_0^2/c_1$ — параметру, який характеризує акустичні втрати, а також представлення швидкості звуку у вигляді $c^2=c_0^2\left(1+\frac{\gamma+1}{\rho_0\varphi_0}\delta\rho\right)$, дозволяє отримати рівняння, що замикає рівняння гідродинаміки суміші у вигляді

$$2\beta_1\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}+\nu_{еф}\frac{d\rho}{dt}\right)+c_0^2\left[\delta\rho+B(\delta\rho)^2\right]=\delta P_0, \quad (1.80)$$

де $\nu_{еф}=(\nu_г+\nu_{ак})/2$ — ефективна густина.

Як і раніше, можна знехтувати гідродинамічною нелінійністю та дисипативними членами в рівнянні гідродинаміки. Тоді рівняння (1.58) та (1.80)

будуть вихідними для побудови хвильових процесів у бульбашковому середовищі з дисипацією на бульбашках.

За умови, що тиск суміші є тиском на безкінечному віддалені від бульбашки P_∞, та з перетворенням рівняння (1.80) з урахуванням виразу (1.58), очевидним є наступне співвідношення

$$2\beta_1\left(\frac{\partial^4\rho}{\partial t^2\partial x^2}+\nu_{\text{еф}}\frac{\partial^3\rho}{\partial t\,\partial x^2}\right)+c_0^2\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial t^3}(\delta\rho)^3\right]-\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0. \qquad (1.81)$$

Тоді, виходячи з міркувань, що дисипативні, нелінійні та дисперсійні ефекти малі, допустима заміна у нелінійному членові величини $\delta\rho$ на δP наступним чином: $\delta P\approx c_0^2\delta\rho$. Останнє припустимо тільки тоді, коли густинні та дисперсні процеси слабо впливають на розповсюдження хвилі, тобто деформація та затухання хвилі на відстані порядку її довжини. Отже

$$2\beta_1\left(\frac{\partial^4\rho}{\partial t^2\partial x^2}+\nu_{\text{еф}}\frac{\partial^3\rho}{\partial t\,\partial x^2}\right)+c_0^2\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial t^3}(\delta\rho)^3\right]-\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0. \qquad (1.81)$$

$$2\beta_1\frac{\partial^4\rho}{\partial t^2\partial x^2}+c_0^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+\frac{B}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta\rho)^2+2\nu_{\text{еф}}\frac{\partial^3\rho}{\partial t\,\partial x^2}=0. \qquad (1.82)$$

При цьому очевидно, що можна записати наступний вираз щодо розповсюдження хвилі:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+c_0^2\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{B}{2c_0^2}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\rho)^2-\nu_{\text{еф}}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\beta_1\frac{\partial^3\rho}{\partial t\,\partial x^2}=0. \qquad (1.83)$$

Подальша заміна $\partial/\partial t=-c_0\partial/\partial x$ в дисперсному членові, дозволяє отримати остаточний вигляд рівняння для опису еволюції збудження (суть — рівняння динаміки) у бульбашковій системі з урахуванням дисипативних та дисперсійних ефектів

$$\frac{\partial P}{\partial t}+c_0^2\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{B}{c_0^2}\delta\rho\frac{\partial P}{\partial x}-\nu_{\text{еф}}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\beta_1 c_0^2\frac{\partial^3\rho}{\partial x^3}=0. \qquad (1.84)$$

Рівняння (1.84) в канонічній формі приймає вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu_{\text{еф}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta_1 c_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \qquad (1.85)$$

Допустимо увести в якості масштабів ∂P_0, l_0 — амплітуду та ширину початкового збудження; $U_0 = \dfrac{\gamma + 1}{2 c_0 \varphi_0} \dfrac{\delta P_0}{\rho_0}$ — масштабну швидкість збудження в системі координат, яка рухається з хвилею. З урахуванням швидкості c_0, можна перейти до безрозмірної форми

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \xi^3} = 0. \qquad (1.86)$$

В (1.86) число Рейнольдса визначається як $\text{Re} = l_0 (\gamma + 1) c_0 \delta\rho / 2\gamma P_0 \nu_{\text{еф}}$.

Для граничного випадку сильної дисипації в середовищі та слабкої дисперсії поведінки хвилі в бульбашковому середовищі буде підпорядковуватися рівнянню

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{l}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}. \qquad (1.87)$$

Тут $\tilde{l} = t u_0 / l_0$; $\xi = (x - t c_0)/l_0$. Очевидно, що (1.87) являє собою шукане хвильове рівняння для середовища з дисипативним ефектом.

Аналіз показує, що (1.87) має аналітичний розв'язок, що випливає з «гладкості» границь, в яких розвивається двофазна система (наприклад, стінки труби, де рухається газорідинна суміш). Для випадків $\text{Re} = \infty$ и $\text{Re} = \text{const}$ розв'язок (1.87) представлено на рис. 1.8.

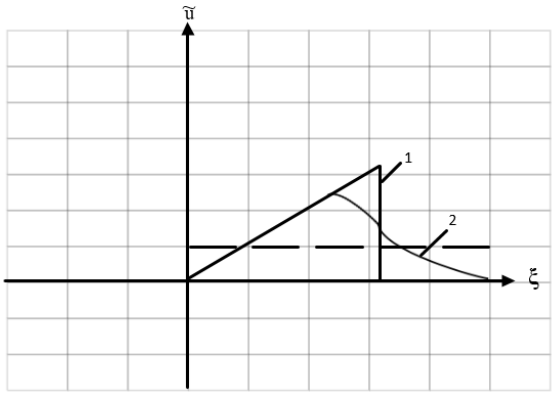


Рис. 1.8. — Розв'язок рівняння виду (1.87):

1 — $\mathrm{Re} \to \infty$; *2* — $\mathrm{Re} = \mathrm{const}$

Як видно з рис. 1.8, асимптотична форма профілю хвилі може розглядатися як універсальна.

Слід зазначити, що важливою якісною особливістю фізичної картини руху паро- (газо-)рідинонних двофазних систем є наявність зон розрідження та стискання суміші, що визначається, з одного боку, змінністю значення параметру паро- (газо-)вмісту X (або масового паро- (газо-)вмісту φ), а з другого боку — хвильовим характером розвитку динаміки двофазної системи. Така особливість спричиняє появу *нерівновагових* ефектів при динамічному русі, що складно описати (формалізувати) в рамках диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП), які розглядалися вище в якості ММ динамічних станів паро- (газо-)рідинних двофазних систем. Адекватні ММ останніх, даному випадку, можна побудувати на основі математичного апарату *варіаційних нерівностей* у частинних похідних [55 — 58], які дозволяють у коректний спосіб виокремити просторові або часові характеристики паро- (газо-)рідинних двофазних систем у динамічному русі. При цьому варіаційний підхід дозволяє зняти *обмеження гладкості* шуканого розв'язку, викликаного природою паро- (газо-)рідинонних двофазних систем (наприклад, наявність вище згаданих зон розрідження та стискання, які спричиняють появу розривності у шуканих функціях стану).

Розглянемо, в якості прикладу, одну з типових постановок задач, сформульовану для динаміки паро- (газо-)рідинонної двофазної системи за умови утворення зон розрідження та стискання. Нехай $u(z)$ — функція тиску, яка встановилася під впливом змушуючої функції $f(z)$, яку визначено на обмеженій відкритій множині Ω простору $\Re^n$, $n = 1, 2, 3$ з гладкою границею Γ. Нехай область Ω заповнено паро- (газо-)рідинною сумішшю з тиском $u(z)$, причому, в середині області Ω під впливом змушуючої функції $f(z)$ можуть утворюватися

зони Ω_i з границями Γ_i, $i=\overline{1,N}$ ($\Omega_i \in \Omega$; $\left(\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_j\right) \le \Omega$; границі Γ_j — замкнуті, якщо $\Gamma_j \notin \Gamma$, або Γ_j — розімкнуті, якщо $\Gamma_j \in \Gamma$, $j \le i$) такі, що, в залежності від сформованого на границях Γ_j ($j \le i$) тиску $u_{\Gamma_j} = u(z)\big|_{z\in\Gamma_j}$, характеризуються розрідженням (або стисканням) паро- (газо-)рідинної суміші в середині цих зон Ω_i ($i=\overline{1,N}$). Задача полягає у відшуканні фізичних характеристик зон розрідження (стискання) $\Omega_i \in \Omega$, $i=\overline{1,N}$ (наприклад, параметру паро- (газо-)вмісту X) або їх границь Γ_i, $i=\overline{1,N}$.

Сформульовану задачу можна віднести до класу *екстремальних задач з обмеженнями* [59] і представити у вигляді

$$J(u) = \inf_{v\in K} J(v), \tag{1.88}$$

де

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v), \tag{1.89}$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{\partial v}{\partial z_i}dz + \int_{\Omega} uv\,dz, (f,v) = \int_{\Omega} fv\,dz, \tag{1.90}$$

а K, що визначається співвідношенням

$$K = \left\{ v \middle| \; v \ge 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \tag{1.91}$$

є замкнутою опуклою множиною.

Задача (1.88) має єдиний розв'язок (зокрема у вигляді розподіленого поля тисків $u = u(z)$) і цей розв'язок досягається при виконанні варіаційної нерівності

$$u \in K:\; a(u, v-u) \ge (f, v-u), \forall v \in K. \tag{1.91}$$

Граничні умови для кожної із зон $\Omega_i \in \Omega$, $i=\overline{1,N}$, що розглядаються мають вигляд (далі η — нормаль до границі Γ_i, $i=\overline{1,N}$):

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(z) = 0, \quad u_{\Gamma_i}(z) > u(z) \tag{1.92}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(z) \geq 0, \quad u_{\Gamma_i}(z) \leq u(z) \tag{1.93}$$

для всіх $u \in K$. Тут умова (1.91) відповідає випадку, коли в зоні Ω_i спостерігається стискання паро- (газо-)рідинної суміші, і при цьому Γ_i перешкоджає витоку суміші із зони Ω_i, в наслідок чого витрата суміші із зони Ω_i дорівнює нулю. Умова (1.93) відповідає випадку, коли в зоні Ω_i спостерігається розрідження паро- (газо-)рідинної суміші, і при цьому Γ_i не перешкоджає надходженню суміші в зону Ω_i.

Якщо нерівновагові (тобто *однобічні*) ефекти спостерігаються при перевищенні функції $u(z)$ на границі Γ_i, $i = \overline{1, N}$ деякого *порогового* значення $u_b(s)$, умови (1.92) та (1.93) приймають більш універсальну форму

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(z) \geq 0, \quad u_{\Gamma_i}(z) \leq u_b(s) \tag{1.94}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(z) = 0, \quad u_{\Gamma_i}(z) > u_b(s) \tag{1.95}$$

для всіх $u \in K$.

Широкого розповсюдження набула інша форма представлення граничних умов (1.94), (1.95):

$$\left[u(z) - u_b(s)\right] \geq 0, \tag{1.96}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \geq 0, \tag{1.97}$$

$$\left[u(z) - u_b(s)\right]\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{1.98}$$

Сукупність граничних умов (1.96) — (1.99) носить назву граничних умов Сіньоріні. Тут границя Γ складається з ділянок Γ_1 та Γ_2. На Γ_1 виконуються умови $u(z) = u_b(s)$, а на Γ_2 — $\partial u / \partial \eta = 0$. При цьому розташування цих ділянок завчасно невідомо, а їх відшукання еквівалентно розв'язку задачі (1.91), (1.96) —

(1.99). Тобто, мова йде про задачу з невідомою границею, що характерно для більшості задач динаміки паро- (газо-)рідинних двофазних систем.

1.2.2. Методи та засоби обчислювальної реалізації математичних моделей динамічних станів пароріднних двофазних систем

Динамічні процеси у паро- (газо-)рідинних двофазних системах в значній кількості випадків мають складну фізичну природу, що ускладнює (або навіть виключає) можливість їх безпосереднього експериментального дослідження (наприклад, формування функції стану шляхом безпосередніх вимірювань; визначення характеристик і параметрів у ході натурних експериментів; оцінювання станів в умовах «зашумленого» спостереження, при недостатньому числі вимірювальних пристроїв або надмірно високій ціні окремих вимірювань) [60 — 62]. Як наслідок, погіршується якість систем управління даними динамічними процесами. Одним із дієвих підходів розв’язання проблеми заповнення інформації, що бракує, про стан паро- (газо-)рідинних двофазних систем є їх математичне моделювання. Тому актуальною є проблема створення та вдосконалення методів аналізу та моделювання паро- (газо-)рідинних двофазних систем, інтерпретації і використання результатів їх аналізу та моделювання у прикладних задачах, а також організації теоретичних та прикладних досліджень зазначених двофазних систем.

Реалізація ММ реальних паро- (газо-)рідинних двофазних систем практично виключає можливість аналітичних розв’язків (зокрема, через змінність з довільним характером параметрів двофазної суміші в просторовій області Ω) та передбачає зведення задачі до числових розв’язків із застосуванням засобів обчислювальної техніки (ОТ) [60]. На етапі машинного моделювання значне місце посідають питання, пов'язані з переходом від безперервних ММ досліджуваних паро- (газо-)рідинних двофазних систем до їх дискретних аналогів. Складна геометрія просторових областей, невизначеність границь зон розрідження та стискання в середині двофазної суміші, нелінійний характер

коефіцієнтів вихідних ММ та інші чинники визначають вибір різницевих методів при числовому дослідженні паро- (газо-)рідинних двофазних систем. Питання, пов’язані з переходом до дискретних ММ різних класів двофазних систем, досить докладно розроблено [63 — 66] і вони ґрунтуються, в більшості випадків, на застосуванні стандартних процедур методів с*кінчених різниць та методу скінчених елементів* [67 — 76]. Відомі переваги та недоліки методів кінцевих різниць та кінцевих елементів, що застосовуються при апроксимації безперервних ММ поширених у практиці двофазних систем, розглянуто, наприклад, у роботах [60, 65 — 67]. При цьому перевага того чи іншого методу визначається специфікою конкретної задачі. В даний час широко поширений підхід до реалізації кінцево-вимірних ММ, що полягає в перетворенні рівнянь для вузлів дискретизації у векторно-матричну форму. Процес моделювання реалізують з використанням класичних методів розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), записаних у векторно-матричній формі [77 — 79].

Роботи [56. 57], зокрема, висвітлюють застосування матричних підходів при розв’язуванні кінцево-різницевих рівнянь динаміки двофазних систем, що описують фільтрацію лінійно-в’язких та в’язкопластичних (або аномальних) рідин.

Матричні процедури розв’язку дозволяють не використовувати спеціальні методи розв’язування рівнянь для вузлів сітки дискретизації, а безпосередньо залучати з цією метою універсальні методи розв’язування СЛАР. Також векторно-матрична форма представлення ММ динаміки двофазних систем дозволяє у простий спосіб залучати до реалізації поставленої задачі інші алгоритми та програми, орієнтовані також на роботу з ММ у векторно-матричній формі. Одначе при цьому слід зазначити, що формалізація вихідної задачі у векторно-матричній (блочній) формі вимагає значних обчислювальних ресурсів комп’ютерної техніки, що зумовлено високою розмірністю векторно-матричних співвідношень, утворених при переході від алгебраїчних рівнянь, які записано для вузлів сітки дискретизації, до векторно-матричних співвідношень.

У ряді прикладних задач аналізу та моделювання двофазних систем (наприклад, дослідження пластових геологічних систем [9, 80, 81]) матриці коефіцієнтів векторно-матричних співвідношень містять значну кількість нульових елементів. При цьому ненульові елементи зосереджено на головній діагоналі матриць або поблизу неї. Такі матриці носять назву розріджених матриць стрічкового типу. Врахування зазначеної властивості матриць коефіцієнтів при побудові інформаційної технології (ІТ), що їх реалізує, може значно скоротити час обчислень та необхідний обсяг пам'яті комп'ютерних засобів.

Ітераційні методи розв'язування СЛАР з розрідженими матрицями детально висвітлено в роботах [77 — 79]. В цих роботах зазначено, що ітераційні методи занадто чутливі до обраних ітераційних параметрів або, іншими словами, — залежить від формалізації задачі. Крім того, в роботі [77] на числових прикладах показано, що для багатьох задач математичного моделювання двофазних систем збіжність розв'язання ітераційних методів настільки повільна, що їхнє виконання стає практично неприйнятним. Однак для реалізації ітераційних методів потрібна «незначна» машинна пам'ять додатково до пам'яті, необхідної для зберігання коефіцієнтів різницевих рівнянь. Викладене вище свідчить про те, що ітераційні методи, як методологічну основу реалізуючої ІТ, слід застосовувати для обчислення дуже великих СЛАР.

Прямі методи розв'язування СЛАР, в тому числі великої розмірності та з розрідженими матрицями коефіцієнтів розглянуто в роботах [78, 82]. Певного поширення серед прямих методів набуло *стрічкове виключення Гауса*, а також методи, засновані на застосуванні *схем упорядкування* (стандартне впорядкування, варіанти двоколірного впорядкування тощо). Труднощі у застосуванні прямих методів при реалізації ІТ полягають значних запитах машинної пам'яті на зберігання елементів матриць коефіцієнтів. Також неусувним недоліком прямих методів є наявність похибок округлення, що впливають на розв'язок СЛАР. Цей недолік набуває визначальної ваги у разі високого порядку системи лінійних рівнянь. Зменшення впливу вказаних недоліків можна досягнути застосуванням

методів, що базуються на схемах двоколірного впорядкування, зокрема, схеми Д4 (та її модифікацій [83]) над іншими.

Доцільним може виглядати спроба поєднання в одній обчислювальній процедурі реалізації кінцевомірних ММ двофазних систем прямих та ітераційних методів.

Важливим класом задач дослідження двофазних систем є пошук управління ними, що базуються на застосуванні методів, пов'язаних з дискретизацією вихідної ММ процесу [60, 67, 84, 85]. І в даному разі задача зводиться або до віднаходження необхідних умов оптимальності [86 — 89], або до безпосереднього визначення градієнта функціоналу якості [67, 86].

У разі визначення необхідних умов оптимальності (наприклад, при розв'язанні задачі за принципом максимуму [67, 90]), необхідно для апроксимуючих диференціальних або різницевих рівнянь розв'язувати двоточкову крайову задачу (ДТКЗ) [67, 91]. Процес розв'язування ДТКЗ полягає у побудові множини розв'язків, що задовольняють граничним умовам на одному кінці (закріпленому), шляхом варіювання на іншому кінці (вільному) граничними умовами як параметрами. При задоволенні обумовленим умовам (критерію) оптимальності деякі розв'язки проходитимуть через задані граничні умови на закріпленому кінці [88, 89]. Існуючі методи розв'язування ДТКЗ докладно розглянуто в роботах [66, 91].

Для визначення градієнта функціоналу якості може бути застосовано *метод дискретного програмування* [88] та *градієнтні методи* (методи якнайшвидшого спуску) [88, 89].

Перший із зазначених методів полягає у покроковому використанні принципу оптимальності Беллмана. Істотним недоліком, що стримує його широке використання, є великий обсяг пам'яті обчислювача [88, 91].

Сутність градієнтних методів розв'язування задач оптимального управління полягає в тому, що при пошуку екстремуму функціоналу використовується його перша варіація для визначення напрямку зміни управління, що призводить до найбільш швидкого підйому (спуску) до

екстремального значення [87 — 89]. Відомим є метод визначення градієнта, що ґрунтується на різницевій апроксимації частинних похідних за окремими компонентами вектора управління [87]. Для його реалізації потрібно стільки разів розв'язувати систему рівнянь динаміки досліджуваної двофазної системи, якою є розмірність вектора управління. Це безперечний недолік даного методу. До ефективних обчислювальних процедур призводять градієнтні методи, що використовують для визначення функціоналу зведену систему рівнянь [87 — 89]. Досить докладно огляд градієнтних методів наведено у роботі [88].

Що стосується числового розв'язування задач на *варіаційні нерівності*, то слід розрізняти *динамічні* та *статичні* задачі. Для розв'язування динамічної задачі можна провести дискретизацію за часом, зводячи задачу до послідовності статистичних задач. Можна також «згладити» функції енергії, які не диференціюються, за допомогою тої або іншої процедури регуляризації, зводячи вихідну задачу до послідовності динамічних задач на рівності, які приводять до нелінійних диференційних рівнянь. Відносно розв'язування статичних задач також є дві можливості. Якщо задачу може бути поставлено як задачу *мінімізації*, то використовуються підходящі алгоритми оптимізації, в іншому випадку застосовується процедура «згладжування», яка приводить до послідовності нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Розширення можливостей сучасних апаратних засобів ОТ стимулює розвиток методів числової реалізації варіаційних нерівностей, що приводить до ліквідації наявного розриву між рівнем розвитку якісної теорії варіаційних нерівностей та числом її практичних додатків. Ряд важливих результатів в цьому напрямку отримано, наприклад, в роботах [57 — 59]. Зокрема, в роботах [57, 59] розглянуто питання реалізації еліптичних задач із застосуванням методу кінцевих елементів. На прикладах задач з області механіки рідин показано, що даний підхід дозволяє зберегти властивості сталості, існування та єдиності кінцево-вимірних аналогів варіаційних нерівностей. Інтерес являє підхід до обчислювальної реалізації *еволюційних варіаційних нерівностей* (задача акліматизації) [57]. Підхід полягає у зведенні динамічної задачі до набору еліптичних задач, які, в свою

чергу, розв’язуються на основі методу кінцевих елементів. Даний підхід відноситься до групи методів реалізації з вихідною кінцево-вимірною апроксимацією.

З точки зору розв’язування прикладних задач інтерес становлять дотичні методи реалізації варіаційних нерівностей, запропоновані для задач з вільною границею. Наприклад, в роботі [58] запропоновано метод *інтегральних рівнянь*, а в роботах [92, 93] — метод *конформних відображень*. Дані методи послужили інструментарієм при розв’язуванні низки актуальних задач фільтрації рідин в пористих середовищах. До недоліків даних методів слід віднести жорсткі обмеження на геометрію просторових областей, які розглядаються, та вимоги до характеристик пористого середовища. В роботі [59] запропоновано метод *варіації границі*, який вільний від певних недоліків вказаних вище методів, зокрема, від вимоги до геометрії просторових областей, що розглядаються.

Одним з найбільш перспективних підходів щодо розв’язування варіаційних нерівностей є застосування методів теорії *оптимального управління*. Даний підхід полягає у наближеному ітераційному пошуку невідомої границі. Одначе при цьому не висувається пропозиція щодо звуження можливих розв’язків ітераційної процедури. З більш пізніх робіт, які розвивають у подальшому даний підхід, інтерес становлять, наприклад, [58, 59]. В них було отримано умови існування, єдиності та сталості розв’язків просторово-розподілених варіаційних нерівностей еволюційного типу. Разом з тим в зазначених роботах не ставилося та не розв’язувалося питання реалізації нерівностей.

Слід зазначити, що при моделюванні дифузійних (і, вочевидь, фільтраційних, в тому числі і для двофазних систем — як різновид останніх) процесів з ММ у вигляді варіаційних нерівностей аналітичні розв’язки можливо отримати лише для вельми обмеженого кола задач, що характеризуються особливими випадками збуджуючих функцій та геометрії просторових областей. У переважній більшості прикладних задач розв’язок може бути досягнуто тільки із застосуванням числових методів.

Серед *інструментальних програмних засобів* (ІПЗ) реалізації ММ паро-(газо-)рідинних двофазних систем насамперед слід вказати на проблемно-орієнтований пакет MatLab [94 — 97]. При цьому пакет MatLab як інструментальна база, на якій створюються дані засоби, має основну перевагу — відкритість коду, що дає можливість в програмах користувача використовувати внутрішні запрограмовані алгоритми, а також виконувати їх модифікацію. Програмний інтерфейс програм (API) здійснює обмін даними між програмами пакета MatLab та іншими програмами у вигляді діалогового обміну «клієнт — сервер» [94. 95]. Символічні обчислення MatLab засновано на бібліотеці, що є ядром програмної платформи Maple [98].

Проста вбудована мова програмування MatLab дозволяє легко створювати власні алгоритми. Простота мови програмування компенсується великою кількістю функцій MatLab та ToolBox. Дане поєднання під час використання формалізованих процедур забезпечує швидку розробку ефективних програм, вкладених у розв’язок практичних задач [95— 97].

Виходячи з поставленої мети дисертаційного дослідження, при аналізі пакета MatLab слід, передусім, вказати на розвинені можливості візуалізації двох- та тривимірних даних. Високорівневі графічні функції покликані скоротити зусилля на реалізацію ІТ до мінімуму, забезпечують якісні результати [94]. Повний доступ до зміни властивостей графіків, що відображаються, дають низькорівневі функції, що, у поєднанні з засобами декрипторної графіки [94, 96], дозволяють створювати «гнучкі» програми MatLab з графічним виведенням інформації. У цьому сенсі важливим інструментом пакету MatLab є візуальне середовище GUIDE, призначене для написання програм з графічним інтерфейсом користувача.

MatLab є інтерпретатором, тобто. кожен рядок програми перетворюється на код і потім виконується. Дану обставину (у певному сенсі) слід розглядати як недолік, оскільки істотно збільшується час роботи алгоритму, що містить циклічні дії, які повторюються. Тому актуальною задачею при створенні відповідних ІТ на

основі пакету MatLab слід розглядати можливість створення, наприклад, компіляторів, які забезпечують підвищення продуктивності обчислень.

Програмна платформа MatLab має значну кількість функцій та відповідних «програмних інструментів» — ToolBox. Таке поєднання, із застосуванням формалізованого представлення процедур обчислювального процесу, забезпечує швидку розробку ефективних програм розв’язування прикладних задач [95, 97].

Крім пакета MatLab як інструментального середовища для створення ІТ реалізації засобів аналізу та моделювання паро- (газо-)рідинних двофазних систем, можуть бути використані, наприклад, пакети MatCad [99] та SciLab [99 — 102].

На закінчення, як результат виконаного аналізу, слід зазначити таке. Кількісний і якісний опис динаміки паро- (газо-)рідинних двофазних систем часом пов’язано з труднощами методологічного і прикладного характеру. Так методологічні проблеми пов’язано з недосконалістю методів досліджень (зокрема, відсутність чи обмеженість застосування аналітичних і числових методів моделювання та ідентифікації), а прикладні проблеми — переважно з питаннями інформаційного та алгоритмічного забезпечення (наприклад, складнощами обробки експериментальних даних, побудови ММ на основі результатів натурних випробувань, екстраполяції прогнозних оцінок тощо). Це призводить до необхідності організаційного вдосконалення теоретичного та прикладного аспектів дослідницької бази паро- (газо-)рідинних двофазних систем (як то: розробка адекватних ММ процесів, які розглядаються, та ефективних методів їх дослідження; створення ІПЗ математичного моделювання; вдосконалення форм аналізу та інтерпретації якісних та кількісних величин; планування та проведення експериментальних досліджень на новій теоретичній основі з використанням удосконалених інструментальних засобів та інформаційних технологій).

1.3. Проблематика основних задач моделювання та ідентифікації динамічних станів пароріднинних двофазних систем

Виконаємо дослідження задач моделювання та ідентифікації динамічних процесів (динамічних станів) пароріднинних двофазних систем. Для конкретності викладення матеріалу будемо спиратися на типові приклади механіки паро- (газо-)рідинних середовищ, переважно розглядаючи двофазні системи «рідина — газ», зокрема «нафта — газ» або «газована нафта» [103 — 105], причому враховуючи, що рідинна фаза (в даному випадку — нафта) може виявляти в'язкопружні властивості, тобто розглядатися як «аномальна» рідина, або така, що не підпорядковується лінійному закону — закону Дарсі [106, 107].

Будь-яка двофазна система являє собою унікальний об'єкт, що характеризується лише їй притаманній структурою, простором станів, полями параметрів, геометрією, властивостями границь тощо [106]. Крім того, реальні паро- (газо-)рідинні двофазні системи як і процеси *реології* (окремим проявом яких є процеси *фільтрації газоріднинних двофазних систем у пористих середовищах*), погано піддаються дослідженню, тому завжди існує брак інформації про об'єкт — просторову область Ω з границею Γ, в якій розвивається досліджуваний процес. Позбутися дефіциту інформації можна розв'язанням задач *аналізу* таких, наприклад, як математичне моделювання, оцінювання станів та параметрів просторової області Ω (для прикладу реологічних процесів — кістяка пористого середовища). Зазначені задачі аналізу можуть мати і самостійне прикладне дослідницьке значення [60], або результати їх розв'язків можуть бути використані з метою ефективного розв'язання наступних задач управління. До останніх, наприклад у випадку двофазних реологічних систем «нафта — газ» відносяться: забезпечення максимальної нафтовіддачі пласта, формування заданих властивостей приграничних зон тощо [4, 5, 104, 105].

Розв'язування вказаних вище задач можливо лише на основі достовірного математичного опису паро- (газо-)рідинних двофазних систем, що розглядаються.

Моделювання, як найважливіший етап дослідження, від якого залежить реалістичне розв'язання всіх вище вказаних задач аналізу, пов'язано зі складностями теоретичного та прикладного характеру. Одна з основних проблем моделювання — *адекватність математичних моделей* реальним фізичним процесам [106]. Вивчення даної проблеми надто важливо, оскільки покладені в основу досліджень ММ ідеалізовано відбивають суть фізичних процесів, що відбуваються. В якості прикладу розглянемо врахування особливостей фізичної природи газорідинної двофазної системи на етапі побудови її ММ в умовах реального нафтового родовища, що розробляється у водонапірному режимі. При цьому двофазну систему утворює двофазний флюїд (суміш) «нафта — вода», причому одна з фаз (нафта) може виявляти аномальний характер.

Як відомо з прямих спостережень [25, 108, 109] реальні пористі середовища, в яких здійснюють рух (за прийнятою в спеціальній літературі термінологією — *фільтруються*) газонафтові двофазні системи, характеризуються суттєвою анізотропією, обумовленою природою опадових накопичень. Шпаруватість, яка майже завжди спостерігається, суттєво впливає на процес фільтрації, особливо неоднорідних систем і, безумовно, повинна бути врахована при його математичній формалізації у пористому середовищі. Слід мати на увазі, що продуктивні газонафтові шари розділені між собою достатньо тонкими, практично непроникними, шарами — пропластками («покришками») [106, 107]. При побудові адекватної ММ в даному випадку, повинні бути врахованими деякі гіпотези щодо структури пласта [25, 106 — 108, 110 — 115].

1. Пласт, де відбувається фільтрація двофазної газонафтової системи, складається з декількох пропластків, які достатньо розрізняються своїми властивостями (суть — *параметрами*). Сусідні пропластки можуть:

— розділятися практично непроникними тонкими прошарками;

— стикуватися безпосередньо.

2. У межах пропластку пласт неоднорідний (тобто являє собою *гетерогенне середовище*) у всіх трьох вимірах. Одначе, масштаб неоднорідності по товщині може бути порівняним із самою товщиною пропластку. Тому, можна

вважати, що у межах пропластку параметри пористого середовища (пористість, проникність) є пласкі поля [108, 109].

3. Для побудови ММ використовуються дані кернових або геофізичних досліджень, тобто дрібномасштабна інформація, яку отримано з точок, розташованих в межах геометрії продуктивного пласта.

Важливою відмінністю парорідинних двофазних систем (наприклад, водних, спиртових, бензинових) від газорідинних двофазних систем (наприклад, водо-вуглекисло-газових, водно-повітряних тощо) є однорідність перших за хімічним складом, що зумовлює появу моменту фазової рівноваги — зачатку утворення парових бульбашок та конденсації парової фази, і що не притаманно газорідинним двофазним системам (у яких газова та рідинна фази існують незалежно одна від одної, оскільки мають різний хімічний склад). Відшукання моменту та умов утворення фазової рівноваги для парорідинних двофазних систем також може бути окремою задачею математичного моделювання.

Процеси розділення багатокомпонентних сумішей органічних продуктів є одними із самих складних та енергомістких процесів в хімічній та нафтохімічній технологіях. Багатокомпонентні суміші, які утворюються в реакційних вузлах (апаратах), зазвичай, являють собою сполуки речових різних класів, що мають суттєво відмінні фізико-хімічні властивості. Як відомо, сполуки, які належать до різних гомогенних рядів, схильні утворення *азеотропів*, що містять різну кількість компонентів [116, 117]. Для розробки ефективного способу розділення реакційної суміші (тобто тієї суміші, що перебуває у технологічному апараті), поза залежністю від методу, що використовується, необхідна вичерпна інформація щодо властивостей суміші, яка розділяється, та про наявність і властивості азеотропів. Зазначене також може виступати як проблематика задач математичного моделювання двофазних систем, якщо фазами в них виступають парова (газова) та рідка компоненти.

Як стверджується в [83, 106], адекватність ММ та отриманих результатів досліджень процесів фільтрації двофазної системи — газованої нафти може бути підвищено шляхом розв’язання задач *оцінювання* (або *ідентифікації*) параметрів.

Серед задач аналізу процесів фільтрації газованої нафти досить важливе місце займає задача параметричної ідентифікації їх ММ. Особлива роль цієї задачі та нетривіальність її постановки витікає з унікальності геометрії просторової області Ω (разом з границею Γ), а також суттєвою неоднорідністю (тобто гетерогенним характером) структури фізичного середовища. Загальноприйнятою [110 — 112] є точка зору, відповідно до якої неоднорідність середовища спричиняє суттєвий вплив на фільтраційні процеси. Відомо також, що цей вплив [106] може не тільки в значній мірі визначати кількісні характеристики процесу фільтрації (наприклад, діапазон зміни пластового тиску), але й до певної межі змінювати його «якість». В цьому сенсі задача визначення характеристик фізичного (пористого) середовища важлива вже сама по собі, оскільки від взаємодії з середовищем окремі фази газованої нафти (або вона в цілому) може набувати в'язко-пружного (аномального) характеру. В роботі [106] наголошувалося, що відсутність адекватного апарату на перших стадіях досліджень призводило до аналізу відносно простих ситуацій, коли приймалося припущення, що середовища шматково-неоднорідні (тобто однорідність зберігається в межах окремих підобластей), кількість цих окремих підобластей порівняно невелика, і вони мають просту («правильну») геометричну форму. Такою, наприклад, є задача про плин в області з включеннями, провідність якої відмінна від провідності області [110 — 113].

Як правило, при гідродинамічному аналізі реальних пластових систем наявною є відносно обмежена інформація щодо їх властивостей, причому, ця інформація носить «точковий» характер, оскільки її можна отримати не у вигляді неперервного поля, а лише в окремих його точках, наприклад, місцях розташування свердловин. Безперечно, обсяг інформації можна збільшити, в основному при бурінні та дослідженні нових свердловин. Одначе, це пов'язано із значними витратами і, в кінцевому підсумку, не знімає повністю невизначеність аналізу, який останній проводиться. Тому розрахункова схема реального процесу завжди носить певний елемент невизначеності, зумовлений неповнотою інформації щодо пластової системи і, відповідно, в цих умовах «точне»

визначення характеристик пористого середовища неможливе. Відчутна хаотичність устрою пористого середовища та його властивостей, що впливають на плин (фільтрацію) газованої нафти як двофазної системи, довільний механізм утворення та еволюції пластової системи, недостатність інформації, вимагають розвиток спеціального апарату, який при аналізі реології двофазних систем враховував би специфічність процесів, що вивчаються. Абсолютно природно в цій ситуації бажання доповнити пробіл в теорії та запропонувати методи ідентифікації паро-(газо-)рідинних двофазних систем (середовищ), причому, ці методи повинні враховувати адекватний математичний опис досліджуваних двофазних систем [81, 106, 110 — 115].

Оскільки, практично єдиними джерелами інформації є точкові вимірювання, то будь-які дослідження, що проводяться на реальній паро- (газо-)рідинній системі, можна поділити на *локальні* та *інтегральні* [2 — 5, 109, 110].

Локальними вважаються дослідження, які проводяться з масштабом усереднення, значно меншим за характерні розміри (наприклад, розмірів бульбашок газу чи пару) досліджуваних двофазних систем. Локальні характеристики забезпечують високу деталізацію аналізу двофазної системи при заданих конкретних координатах.

Інтегральні параметри двофазної системи визначаються за допомогою досліджень у точках заміру (розташування датчиків), які використовують при цьому реальні крупномасштабні характеристики просторової області Ω та її границі Γ. Хоча характеристики процесу можуть вимірюватися лише в одній точці, де розташовано датчик, динамічний перебіг процесу в цій точці залежить від ходу процесу у всій двофазній системі. Таким чином, при інтерпретації слід мати на увазі, що та або інша характеристика, яку отримано в результаті аналізу процесу, є «інтегральною», а точніше кажучи, віднайдений параметр є функціоналом, тобто числом, яке залежить від функції розподілу шуканого та інших параметрів за простором. В цьому випадку масштаби усереднення є порівняними з характерними розмірами (див. вище) досліджуваного поля і можна

очікувати, що інтегральні параметри «змістовніші у інформаційному сенсі», ніж локальні.

Практика гідродинамічних досліджень показує, що можна визначити інтегральні параметри, які характеризують властивості деяких областей. Існуючі інженерні методики аналізу та ідентифікації жорстко співвідносять ці області з точками, в яких відбувається збір інформації, тобто в точках розташування датчиків. При цьому дискретним значенням параметру умовно приписується адреса (координати) відповідних датчиків. В результаті даних натурних досліджень утворюється сітка, що покриває просторову область Ω з границею Γ, в вузлах якої представлено локальну інформацію щодо параметра, який ідентифікується. Значення параметра між вузловими точками обчислюються інтерполяцією та екстраполяцією наявних вузлових значень.

З урахуванням представлених проблем параметричної ідентифікації паро-(газо-)рідинних систем, які здійснюють динамічний рух, проаналізуємо можливі методи розв’язання поставленої задачі. З класичних методів розв’язання задач параметричної ідентифікації для просторово-розподілених об’єктів можна виділити [118]: метод зведення рівнянь у частинних похідних до звичайних з наступним числовим розв’язанням задачі моделювання та ідентифікації [83]; метод квазілінеарізації та прогонки за параметром [119], метод зведених функцій [119, 120]. Інтерес також становить постановка та розв’язування задачі ідентифікації у вигляді оптимізаційної задачі, із залученням для її розв’язування, наприклад, градієнтних методів [121 — 123].

Підводячи підсумок розгляду питань проблематики задач аналізу (моделювання) та ідентифікації динамічних станів паро- (газо-)рідинних двофазних систем, зазначимо, що на поточний час актуальною є розробка машинно-орієнтованих математичних методів моделювання та ідентифікації класу процесів, які розглядаються. Враховуючи відмічену вище специфіку досліджуваних об’єктів (відповідних двофазних систем), а також необхідні обсяги обчислень при розв’язанні задач моделювання (наприклад, обробка матриць коефіцієнтів дискретних ММ) або ідентифікації (багатоваріантні та оптимізаційні

розв’язки), математичні методи, які підлягають розробці, повинні бути економічними, з точки зору обчислювальної реалізації. Причому, програмне забезпечення обчислювальних процедур математичних методів, які розробляються, може бути побудовано за модульним принципом, що забезпечить уніфікацію програмних продуктів та конструювання програмних блоків під розв’язання конкретних прикладних задач, зокрема, у складі АСУ ТП.

Висновки до розділу 1

1. На прикладах поширених у природі та промисловості динамічних процесів плину паро- (газо-)рідинних двофазних систем, зокрема, фільтрації «газованої» нафти у пористих середовищах, показано, що більшість природних та технологічних рідин, які перебувають у реальних просторових областях (наприклад, пластових пористих середовищах), являють собою багатофазні неоднорідні системи, містять різноманітні включення (зокрема, парові чи газові бульбашки) і характеризуються нелінійною поведінкою. При цьому підкреслено, що багатофазність та неоднорідність зумовлюють гетерогенні властивості рідин, які знаходяться у динамічних процесах — русі в просторовій області Ω, обмеженій границею Γ. Вивчено фізичні явища, притаманні динамічним станам паро- (газо-)рідинних двофазних систем, і відзначено їх нерівновагові та псевдопластичні (ділатантні) властивості, що зумовлює якісні прояви картини перебігу цих процесів: виражену спрямованість розвитку, наявність граничного градієнту, в'язкопружність.

Виконано аналіз підходів до математичної формалізації динамічних станів паро- (газо-)рідинних двофазних систем та розглянуто ММ, які існують для опису даних процесів. Зазначено, що у практиці математичного моделювання досліджуваних двофазних систем існує брак їх адекватних ММ. Показано, що виражена спрямованість динамічної поведінки досліджуваних двофазних систем зумовлює інтерес до їх математичної формалізації на основі апарату варіаційних нерівностей. ММ, які при цьому буде отримано, забезпечують високий ступінь адекватності змінному характеру фізичних явищ, що спостерігаються: нерівноваговості перебігу, наявності еволюційних обмежень на функцію стану, залежності просторово-часових характеристик від граничного значення функції стану.

2. Досліджено проблематику основних задач математичного моделювання (моделювання динаміки та ідентифікації) динамічних станів паро- (газо-)рідинних двофазних систем. Важливими для розгляду при цьому є питання,

що витікають з особливостей фізичного прояву динамічної поведінки досліджуваних двофазних систем: сильно виражена змінність перебігу процесу (зокрема, виражений хвильовий характер руху та утворення зон розріження та стискання); значні розміри фазових просторів за одною з просторових координат (наприклад, розвиток процесу в трубах колекторів та барабанах парових котлів); наявність суттєвих нелінійностей (наприклад, граничного градієнту); та неоднорідностей (включень, відмінних за походженням; розріджень та згущень — тобто зміни «ефективної» густини; аномальне зростання опору плину у просторовій області тощо), а також характерна для останніх обмеженість вектору виміру стану та просторово-часова залежність параметрів.

3. Підтверджено необхідність систематизації і класифікації динамічних станів паро- (газо-)рідинних двофазних систем та розробки на їх основі нових ММ досліджуваних процесів у вигляді варіаційних нерівностей. При цьому нагальною є розробка нових та удосконалення існуючих методів і засобів математичного моделювання, що забезпечують ефективне розв’язування прикладних задач в умовах значних обсягів обчислень (наприклад, обробка матриць коефіцієнтів дискретних ММ значної розмірності, реалізація багатоваріантних та оптимізаційних розв’язків в задачах ідентифікації та управління), тобто методів, економічних з точки зору обчислювальної реалізації. Також встановлено доцільність побудови інструментальних програмних засобів моделювання за модульним принципом, що забезпечує уніфікацію програмних продуктів при розв’язуванні прикладних задач.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТИПОВИХ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ

2.1. Математичні моделі утворення та розповсюдження хвиль у пароріднних двофазних системах

Поширеним станом робочих тіл в елементах енергогенеруючих установок (наприклад, в трубках та барабанах парових котлів) є хвилеутворення за умови бульбашкового режиму у пароріднних двофазних системах.

Існуючі на теперішній час ММ хвильових станів пароріднних двофазних систем [4 — 7] описують лише фазові переходи на границі «бульбашка — рідина», але при цьому не враховують теплові ефекти при появі парової фази, що спрощує реальну картину фізичних явищ та обумовлює обмеженість прикладного застосування цих моделей.

Розглянемо якісний вплив теплових процесів у формуванні двофазних пароріднних систем та запропонуємо конструктивні ММ, які компенсують вказаний вище недолік існуючих математичних моделей хвилеутворення в бульбашковому режимі.

Рівновагова математична модель. В ММ, запропонованих у роботах [42, 45. 124, 125], бралося до уваги, що пар у бульбашках та рідина перебувають на лінії термодинамічної рівноваги і зміни тиску призводять до зміни температури насиченості середовища T_s. Наслідком цього є швидкоплинні конденсація пара у бульбашці або поширення процесу випарювання, що приводить до зміни паровмісту φ та густини ρ. Мірою зв'язку прирощення тиску ΔP та прирощення густини суміші $\Delta\rho_c$ слугує величина c^2. Вочевидь, що така модель має обмеження і може бути поширеною лише на збудження у смузі низьких частот.

Перехід у середньо- та високочастотну область хвиле утворення нівелює зазначене вище положення термодинамічної рівноваги. При цьому фізичні явища хвилеутворення характеризуються тим, що довжина теплових хвиль стає меншою

за відстань між бульбашками, а пар у бульбашці веде себе майже адіабатично [126]. У подальшому спостерігається інтенсивний прояв зростання перепаду температур у двофазній суміші (зумовлених різними температурами пару та рідини в останній), що спричиняє [106] стрімке згладжування та «розтягування» хвиль, внаслідок наявного додатного градієнту тиску у двофазній пароріднинній системі (рис. 2.1). При цьому можна говорити про однаковість швидкості утворених хвиль по моменту часу, де спостерігається підвищення тиску рис. 2.2), та швидкості хвиль у газорідинних сумішах [39, 40]. Причому, фізична картина динаміки пароріднинної суміші переважно має нелінійні ефекти.

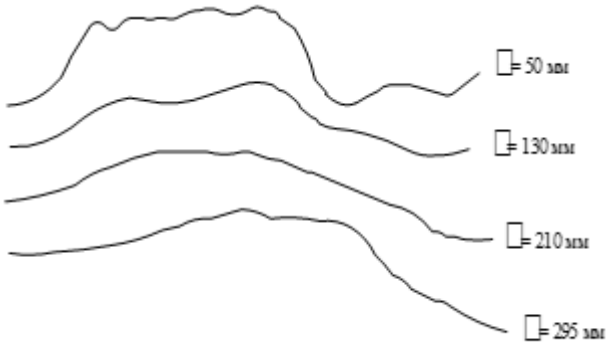


Рис. 2.1. — Характерні структури хвиль стискання у пароріднинній системі на різних відстанях від джерела збудження, $\rho/\rho_0 = 0{,}2$ [98]

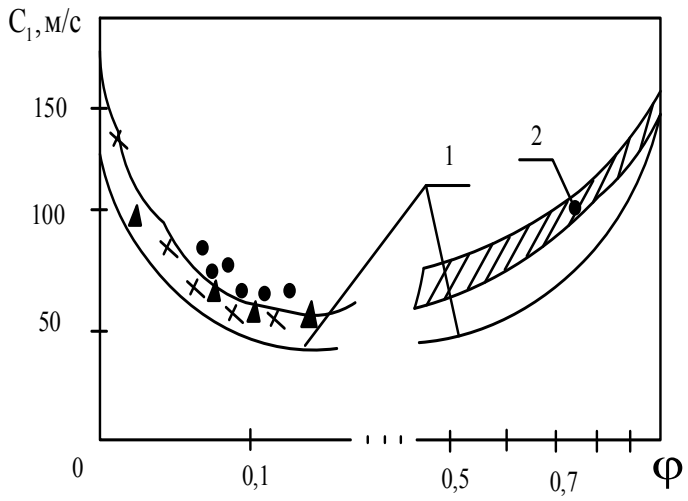


Рис. 2.2. — Швидкість акустичних хвиль у пароріднинній системі $\rho_0 = 0{,}1\,МПа$:
1 — розрахунок за формулою $c = \sqrt{\gamma P/\rho\varphi}$;
2 — данні [114].
Пароріднинна система × — хладон 113 (•, ∧ — хвилі стискання та розрідження) [113, 114]

На підставі зазначеного можна визначити ґрунтовні ознаки для ММ, яка *враховує теплові ефекти* у пароріднинній двофазній системі:

— границя поділу «бульбашка — рідина» повинна характеризуватися термодинамічною рівновагою, що визначається наступною умовою

$$dP_s/dT_s = L\rho_2/T_s\,, \tag{2.1}$$

де P_s — тиск насичення, T_s — температура насичення, L — питома теплота фазового переходу (або прихована теплота пароутворення), ρ_2 — густина пару;

— рідина фаза майже не змінює початкову температуру за оболонкою бульбашки;

— парова фаза перебуває під постійним тиском в межах діючого градієнту температур;

— в просторовій області Ω, зайнятій пароріднинною двофазною системою, виконуються залежності, справедливі для гомогенної бульбашкової суміші;

— нелінійний характер моделі, в основному, має визначатися хвилеутворенням, яке зумовлює ефект «стискання» пароріднинного середовища (переважно у рідинній фазі, при цьому «стисканням» у паровій фазі можна знехтувати).

Далі виконаємо наступні перетворення.

Динамічний стан пароріднинної суміші можна описати наступним співвідношенням:

$$\partial(\partial\rho)/\partial t^2 = \partial(\partial P)/\partial x^2\,, \tag{2.2}$$

де ρ — густина пароріднинної суміші, x — просторова координата уздовж якої розповсюджується хвиля пароріднинної двофазної суміші.

Тоді, рівняння динаміки сферичної бульбашки набуде вигляду

$$R\frac{d}{dt}\left[\frac{dR}{dt}\left(1+\frac{3}{2}\frac{dR}{dt}\right)\right] = \frac{\rho(R)-P_{\text{зн}}}{\rho_1}, \tag{2.3}$$

де R — радіус бульбашки; ρ, ρ_1 — відповідно густина пароріднинної суміші та рідини; $P_{\text{зн}}$ — зовнішній тиск, який впливає на бульбашку, а тиск у бульбащі $P(R) = P_2$ визначається з рівняння енергії для бульбашки [127, 128]

$$\frac{dP_2}{dt}+\frac{3\gamma P_2}{R}\cdot\frac{dR}{dt}-\frac{3(\gamma-1)}{R}\left[q_{\text{гр}}-\frac{L-C_{P_2}T_2}{4\pi R^2}\cdot\frac{dm}{dt}\right], \tag{2.4}$$

де $q_{\text{гр}}$ — тепловий потік на границі; $(dm/dt)=\left[4\pi R^2(q_2-q_1)/L\right]$ — зміна маси бульбашок пару за рахунок різниці теплових потоків у пар q_2 та у рідину q_1; γ — показник адіабати газу.

Диференційне рівняння, яке визначає динаміку сферичної бульбашки в нескінченному об'ємі рідини, і яке враховує питомий об’єм пару V (на 1кг суміші), приймає вид

$$\frac{R_0^2\rho_1}{3V_0(1+\Delta V/V_0)^{1/3}}\cdot\frac{d^2\Delta V}{dt^2}+\frac{2\mu}{V_0(1+\Delta V/V_0)}\cdot\frac{d\Delta V}{dt}-$$

$$-\frac{R_0^2\rho_1}{(1+\Delta V/V_0)^{1/3}}\cdot\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)\right]^2=P_2-P_{\text{зн}}, \tag{2.5}$$

де R_0 — початковий радіус бульбашки; μ — коефіцієнт дисипації в суміші, зумовлений в’язкими втратами та акустичним випромінюванням.

Рівняння енергії (2.4) записується як:

$$\frac{dP_2}{dt}+\frac{\gamma P_0}{V_0(1+\Delta V/V_0)}\cdot\frac{d\Delta V}{dt}=\frac{3(\gamma-1)}{R}\cdot\left[q_{\text{гр}}-\frac{L-C_{P_2}T_2}{4\pi R^2}\cdot\frac{dm}{dt}\right]. \tag{2.6}$$

Із співвідношення для густини пароріднинної суміші $1/\rho=\left[(1-X)/\rho_1+V\right]$ можна записати наступне

$$-\rho_0\varphi_0\Delta V=\delta V_0\left(\rho-P_1/c_1^2\right). \tag{2.7}$$

При розкритті дужок у правій частині рівняння (2.7), члени $\delta\rho$ та δP_1 будуть являти собою зміни густини пароріднинної суміші та тиску рідини, відповідно.

Якщо обмежитись величиною точності другого порядку, а саме: ε^2 (де $\varepsilon=\Delta V/V$), то рівняння (2.5) та (2.6) можна записати спрощено.

Причому рівняння (2.5) з урахуванням (2.7) набуде вигляду

$$\delta P=c_0^2\delta\rho+\frac{d\rho}{dt}\left(\frac{R\delta\rho_1}{3\varphi_0\rho_0}\cdot\frac{d\rho}{dt}+\frac{4\mu}{3\rho_1\varphi_0}\right), \tag{2.8}$$

а рівняння (2.6), як

$$\frac{d}{dt}\left(P_2+\frac{\gamma\rho P_2}{\varphi_0\rho_0}+\frac{\gamma\rho^2P_2}{2(\varphi_0\rho_0)^2}\right)=\frac{3\gamma P_2}{R\rho_2 L}q_1. \qquad (2.9)$$

За відсутності теплового потоку ($q_1=0$)

$$\delta P_2=\frac{\gamma P_2}{\varphi_0\rho_0}\delta\rho+\frac{\gamma P_2}{2(\varphi_0\rho_0)^2}\cdot\frac{d(\rho)^2}{dt}\ \text{або}\ \delta P_2=\frac{\gamma P_2}{\varphi_0\rho_0}\delta\rho+\frac{\gamma P_2}{2(\varphi_0\rho_0)^2}\cdot(\partial\rho)^2. \qquad (2.10)$$

Нелінійність в даному випадку визначається членом $(\partial\rho)^2$, що свідчить про «стискання» середовища, зумовлене хвилеутворенням (або, опосередковано — зміною густини середовища). Збудження тиску δP відшукується з (2.8), а δP_2 визначається з (2.9) за певного значення теплового потоку q_1. Хвилеутворення зумовлюється динамікою тиску (його градієнтом), вираз для якої можна отримати з (2.9) та з урахуванням (2.2) і (2.8), тобто

$$\frac{\partial^2P}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\cdot\frac{\Delta P^2}{P_0}\right)=$$

$$=2\beta_1\frac{\partial}{\partial t\partial x^2}\left[\frac{\partial^3P}{\partial t}\left(1-\frac{4\mu}{3\rho_1\varphi_0}\right)\right]+\frac{3\gamma P_0}{R\rho_2L}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial t}, \qquad (2.11)$$

де $c_0=\sqrt{\gamma P/\rho\varphi(1-\varphi)}$ — початкова швидкість звуку у пароріднинному бульбашковому середовищі.

В рівнянні (2.11) необхідно визначити q_1 через збудження ΔP (градієнта тиску) та параметри середовища, що передбачає (з енергетичної точки зору) необхідність віднаходження розподілу температури у близькості до бульбашки. Тобто необхідно відшукати реакцію двофазної пароріднинної системи на вхідний вплив (суть — перепад або градієнт тиску ΔP), що змінюється довільно. Оскільки збудження у вигляді перепадів тиску можуть бути множинними, то пошук теплового потоку q_1 має зводитися до суперпозиції реакцій двофазної системи на зсунуті в часі на величину τ одиночні збудження. З урахуванням зазначеного можна записати

$$q_1 = \lambda_1 \left[\frac{(T_s - T_0)}{R_0} - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi a (t-\tau)}} \cdot \frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} d\tau \right]. \qquad (2.12)$$

Збудження $(T_s - T_0)$ за допомогою (2.1) може бути замінено збудженням тиску

$$q_1 = \frac{a_1 C_{P_1} \rho_1 T_0}{L \rho_2 R_0} \left(\Delta P + \frac{\rho_0}{\pi a_1} \int_0^t \frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right). \qquad (2.13)$$

Слід зауважити, що якщо вирази (2.12) та (2.13) використовуються для опису процесів гармонійного хвилеутворення, то доцільно використовувати асимптотичні значення q_1 при $t \to \infty$.

У випадку хвилеутворення при значних максимальних амплітудах хвиль та високій швидкості їх формування, що відповідає умові $c_1 \to \infty$, енергетичний опис двофазної парорідинної системи набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2\beta\chi}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} - \frac{3\gamma P_0 q_1}{R_0 \rho_2 L} \cdot \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \left(c_3^2 + \frac{2\beta\chi c_1^2}{c_2^2} \right), \qquad (2.14)$$

де $\chi = c_1^2 / (c_1^2 + c_0^2)$, $c_3^2 = c_0^2 / (1 + c_0^2 / c_1^2)$.

Рівняння динаміки виду (2.14), доповнене відповідними початковими та граничними умовами (виходячи з постановки конкретної прикладної задачі), є найбільш зручною формою ММ для *рівновагового* випадку утворення та розповсюдження хвилі у парорідинних двофазних системах.

Нерівновагова математична модель. Рівняння виду (2.14) коректно описує динаміку утворення та розповсюдження хвилі у парорідинних двофазних системах у випадку, коли, зокрема, відсутні витрати енергії як на фазові переходи в самій двофазній системі, так і на зовнішнє її випромінювання (наприклад, внаслідок високої теплопередачі границі Γ просторової області Ω, в якій здійснюється рух парорідинної двофазної системи). За наявності зазначених витрат енергії, відповідні ММ на основі рівняння динаміки (2.14) позбуваються коректності, а тому не можуть використовуватися при розв'язуванні практичних

задач з обмеженнями у вигляді необхідності врахування теплових потоків на фазові переходи та зовнішнє випромінювання.

В даному випадку ММ повинна бути сформульована як *нерівновагова* відносно теплових потоків в двофазній системі та теплопередачі назовні. Розробимо ММ утворення та розповсюдження хвилі у пароріднних двофазних системах за наявності витрат теплової енергії на фазові переходи «пар — рідина» та на випромінювання у зовнішнє середовище через границю Γ просторової області Ω, в якій відбувається динамічний рух пароріднної двофазної системи.

В якості адекватного математичного опису при розробці нерівновагових ММ розглянемо апарат *варіаційних нерівностей* [35, 55 — 59], який дозволяє врахувати характерні ефекти переважного (суть нерівновагового) розвитку динамічних процесів (наприклад, спрямовану «однобічну» провідність границі просторово області; еволюційну та граничну обмеженість функції стану [106]).

Для пароріднної двофазної системи, за умови зазначених теплових втрат, мають місце залежності: $q_2 \le q_1$ (для конкретності розгляду у подальшому приймемо, що на фазовий перехід «рідина — пар» витрачається більше тепла, ніж на фазовий перехід «пар — рідина», тобто пароутворення переважає конденсацію) та $q_{\text{сум}}(\bar{x}) \ge q_{\text{дв}}(\bar{x}) > q_{\text{зв}}$, $q_{\text{сум}}(\bar{x}) = q_1 + q_2$. Тут $q_{\text{дв}}(\bar{x})$ — тепловий потік, що спричинено хвилеутворенням у пароріднній двофазній системі, і який випромінюється у зовнішнє середовище через границю Γ просторової області Ω, де здійснюється динамічний рух двофазної системи, а $q_{\text{зв}} = \text{const}$ — зовнішній тепловий потік, що може впливати на пароріднну двофазну систему через границю Γ просторової області Ω. Причому $q_{\text{зв}}$ утворюється під впливом температури зовнішнього середовища $T_{\text{зв}}$. Таким чином границя Γ, з огляду на дію теплових потоків, має ефект «однобічної» провідності.

Отримаємо ММ для розглянутого випадку утворення та розповсюдження хвилі у пароріднній двофазній системі, скориставшись при цьому процедурою отримання рівнянь динаміки на основі апарату варіаційних нерівностей,

запропонованою у роботі [98], яку (процедуру) поширимо на клас досліджуваних процесів.

Нехай Ω — відкрита обмежена область в $\Re^n$ (для конкретності подальшого розгляду обмежимося пласким випадком — $n=\overline{1,2}$) з границею Γ, що задає фізичну просторову область, в якій відбувається рух парорідинної двофазної системи, а $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\Gamma$ задає замикання Ω. Шукана функція $P(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ задовольняє наступним умовам: $P(t,\bar{x})$ — гармонійна функція в Ω, неперервна на $\overline{\Omega}$ і є розв'язком рівняння динаміки, аналогічного видом до (2.14), і записаного з урахуванням розподіленості параметрів

$$\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial t^2}-c_3^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}+\frac{2\beta\chi}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial t^2}-c_1^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\right]=$$

$$=\frac{3\gamma P_0(\mathbf{x})}{R_0\rho_2 L}\cdot\frac{\partial q_1(t,\mathbf{x})}{\partial t}, \qquad (2.15)$$

з початковими умовами

$$P(0,\bar{x})=P_0(\bar{x}),\ \ q_1(0,\bar{x})=q_{1_0}(\bar{x}) \qquad (2.16)$$

та граничними умовами у вигляді нерівностей (з огляду на еволюційну обмеженість шуканих функцій)

$$\frac{\partial P(t,\mathbf{x})}{\partial\eta}\ge 0,\ \ P(t,\mathbf{x})<P_{\max};\ \ \frac{\partial q_1(t,\mathbf{x})}{\partial\eta}\ge 0,\ \ q_1(t,\mathbf{x})<q_{1_{\max}}, \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial P(t,\mathbf{x})}{\partial\eta}=0,\ \ P(t,\mathbf{x})\ge P_{\max};\ \ \frac{\partial q_1(t,\mathbf{x})}{\partial\eta}=0,\ \ q_1(t,\mathbf{x})\ge q_{1_{\max}}, \qquad (2.17)$$

де η — нормаль до границі Γ.

Уведемо до розгляду пробні функції $v_P(t,\bar{x})$ та $v_{q_1}(t,\bar{x})$, визначені на просторі (Соболєва) $H^1(\Omega)$. Виконуючи скалярне множення (2.15) відповідно на (v_P-P) та $(v_{q_1}-P)$ (тут і далі, задля простоти запису в аналогічних випадках, знову опустимо аргументи у шуканих функцій) і, скориставшись формулою Гріна [129], отримаємо

$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{2\beta\chi}{c_2^2}\cdot\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial P}{\partial t},\ v_P-P\right)-\left(c_3^2-\dfrac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\dfrac{\partial\left(v_P-P\right)}{\partial x_i}\right]\right\}dx= \\ =\int\limits_\Gamma\left(\dfrac{\partial P}{\partial\eta},v_P-P\right)d\Gamma+\dfrac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\cdot\dfrac{\partial q_1}{\partial t};\quad \forall v_P,P\in K_P, \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\left(c_3^2-\dfrac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\dfrac{\partial\left(v_P-P\right)}{\partial x_i}\right]\right\}dx- \\ -\int\limits_\Gamma\left(\dfrac{\partial P}{\partial\eta},v_P-P\right)d\Gamma=\left(\dfrac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\cdot\dfrac{\partial q_1}{\partial t},v_{q_1}-q_1\right);\quad \forall v_{q_1},q_1\in K_{q_1}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Виконуючи в (2.18) заміну змінних v_P та v_{q_1} відповідно на $\left(-v_P\right)$ та $\left(-v_{q_1}\right)$, в результаті отримаємо

$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{2\beta\chi}{c_2^2}\cdot\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial P}{\partial t},\ v_P-P\right)\le\left(c_3^2-\dfrac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\dfrac{\partial\left(v_P-P\right)}{\partial x_i}\right]\right\}dx- \\ -\dfrac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|v_P\right|\right]\right\}dx+\dfrac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|q_1\right|\right]\right\}dx;\quad \forall v_P,P\in K_P, \\ \left(\dfrac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\cdot\dfrac{\partial q_1}{\partial t},v_{q_1}-q_1\right)\le\int\limits_\Omega\left[1-\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}\cdot\dfrac{\partial\left(v_{q_1}-P\right)}{\partial x_i}\right]dx- \\ -\left(c_3^2-\dfrac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|v_{q_1}\right|\right]\right\}dx+\left(c_3^2-\dfrac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|P\right|\right]\right\}dx; \\ \forall v_{q_1},q_1\in K_{q_1}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Визначимо білінійні форми

$$a_P\left(P,v_P-P\right)=\left(c_3^2-\dfrac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\dfrac{\partial\left(v_P-P\right)}{\partial x_i}\right]\right\}dx, \tag{2.20}$$

$$a_{q_1}\left(q_1,v_{q_1}-q_1\right)=\int\limits_\Omega\left[1-\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}\cdot\dfrac{\partial\left(v_{q_1}-P\right)}{\partial x_i}\right]dx \tag{2.21}$$

та функціонали

$$\mathbf{j}\left(v_P\right)=\dfrac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\int\limits_\Omega\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|v_P\right|\right]\right\}dx, \tag{2.22}$$

$$\mathbf{j}\left(v_{q_1}\right)=\frac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|v_{q_1}\right|\right]\right\}dx, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{J}\left(v_{q_1}\right)=\left(c_3^2-\frac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|v_{q_1}\right|\right]\right\}dx, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{J}\left(v_P\right)=\left(c_3^2-\frac{2c_1^2\beta\chi}{c_2^2}\right)\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\cdot\left|P\right|\right]\right\}dx. \tag{2.25}$$

Тоді, в результаті очевидних перетворень, отримуємо наступну систему варіаційних нерівностей:

$$\begin{cases} P\in K_P:\left(1+\dfrac{2\beta\chi}{c_2^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial P}{\partial t},\ v_P-P\right)-a_P\left(P,v_P-P\right)-\mathbf{j}\left(v_P\right)+\mathbf{j}\left(v_{q_1}\right)\geq 0; \\ \qquad\qquad \forall v_P\in K_P, \\ q_1\in K_{q_1}:\left(\dfrac{3\gamma P_0}{R_0\rho_2 L}\cdot\dfrac{\partial q_1}{\partial t},v_{q_1}-q_1\right)-a_{q_1}\left(q_1,v_{q_1}-q_1\right)-\mathbf{J}\left(q_1\right)+\mathbf{J}\left(P\right)\geq 0; \\ \qquad\qquad \forall v_{q_1}\in K_{q_1}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Покажемо єдиність розв'язку системи (2.26).

Можна стверджувати, що білінійні форми (2.20) та (2.21) є *коерцитивними*. Дійсно, білінійні форми (2.20) та (2.21) визначаються відповідно лінійними операторами

$$a_P\left(P,v_P-P\right)=\left\langle A_P P,v_P-P\right\rangle; \tag{2.27}$$

$$a_{q_1}\left(q_1,v_{q_1}-q_1\right)=\left\langle A_{q_1}P,v_{q_1}-q_1\right\rangle, \tag{2.28}$$

які задають відповідно відображення $A_P:H^1(\Omega)\to H^1(\Omega)$, $A_{q_1}:H^1(\Omega)\to H^1(\Omega)$ в смислі елементів $v_P,v_{q_1},P,q_1\in H^1(\Omega)$. На підставі уведених вище визначень функцій v_P,v_{q_1},P та q_1 очевидно, що $\left\|v_P-P\right\|\to 0$, $\left\|v_{q_1}-q_1\right\|\to 0$. Тоді справедливі твердження

$$\frac{\left\langle A_P v_P-A_P P,v_P-P\right\rangle}{\left\|v_P-P\right\|^2}\to\infty;\ \ \forall v_P,P\in H^1(\Omega),$$

$$\frac{\left\langle A_{q_1} v_{q_1} - A_{q_1} q_1, v_{q_1} - q_1 \right\rangle}{\left\| v_{q_1} - q_1 \right\|^2} \to \infty; \quad \forall v_{q_1}, q \in H^1(\Omega),$$

звідки випливає коерцитивність білінійних форм (2.20) та (2.21) [64], тобто існують такі $\alpha_P > 0$ і $\alpha_{q_1} > 0$, що

$$a_P(v_P - P, v_P - P) \geq \alpha_P \left\| v_P - P \right\|^2; \quad \forall v_P, P \in H^1(\Omega),$$

$$a_{q_1}(v_{q_1} - P, v_{q_1} - P) \geq \alpha_{q_1} \left\| v_{q_1} - P \right\|^2; \quad \forall v_{q_1}, q \in H^1(\Omega).$$

Нехай P_1, P_2 та q_{1_1}, q_{1_2} — деякі розв'язки задачі (2.26), що відповідають правим (за визначенням — нульовим) частинам нерівностей системи (2.26). Тоді випливають очевидні умови

$$\left\| P_1 - P_2 \right\| \leq (1/\alpha_P) \left\| 0 \right\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow \left\| P_1 - P_2 \right\| = 0;$$

$$\left\| q_{1_q} - q_{1_2} \right\| \leq (1/\alpha_{q_1}) \left\| 0 \right\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow \left\| q_{1_q} - q_{1_2} \right\| = 0,$$

що свідчить про єдиність розв'язку задачі (2.26).

Таким чином система (2.26) описує динаміку утворення та розповсюдження хвилі у пароріднинних двофазних системах у разі наявності теплових втрат як на фазові переходи в самій двофазній системі, так і на зовнішнє її випромінювання, тобто являє собою ММ для даного випадку.

2.2. Математичні моделі «коміркового» бульбашкового динамічного стану парорідинних двофазних систем

Рівновагова математична модель. Поширеною фізичною картиною динаміки парарідинного двофазного потоку є випадок, коли кожна бульбашка радіусу R оточується коміркою радіусу $R_{\text{к}}$, причому об'ємний паровміст при цьому відповідає співвідношенню $\varphi \approx R^3 / R_{\text{к}}^3$ [47, 85]. Основним припущенням такої моделі є [47, 85] рівність нулю теплового потоку на границі комірки $q_{1,R_{\text{к}}}$, а, крім того, на границі «бульбашка — рідина» можна обмежитись умовою рівності температури границі температурі насичення. В подальших розмірковуваннях за основу візьмемо рівняння (2.11), яке, при формалізації динамічного стану, використаємо для опису збудження тиску (тут і надалі, крім обумовлених випадків, розглядається поперековий перетин, для якого незалежною просторовою координатою виступає радіус r)

$$\frac{\partial^2 P(t,r)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P(t,r)}{\partial x^2} =$$

$$= 2\beta_1 \frac{\partial^4 P(t,r)}{\partial t^2 \, \partial r^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \cdot c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{\Delta P^2(t,r)}{P_0}\right] + \frac{3\gamma P_0}{R\rho_2 L} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t}, \qquad (2.29)$$

але тепловий потік q_1, що входить до правої частини рівняння (2.19), повинен бути визначеним не за отриманим вище виразом (2.13), що є складовою опису задачі про одиночну бульбашку, а має вбути віднайденим із краєвої задачі, сформульованої щодо розподілу температури навколо бульбашки, розташованої у комірці. Для конкретності подальших розмірковувань, приймемо, що бульбашки та комірки у двофазному потоці мають однакові радіуси R та $R_{\text{к}}$ (відповідно), а границя «бульбашка — комірка» є нерухомою. Тоді досліджувану задачу представимо таким чином:

$$\frac{\partial T(t,r)}{\partial t} = a_1\left[\frac{\partial^2 T(t,r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T(t,r)}{\partial r}\right]; \quad R \le r \le R_{\text{к}}, \qquad (2.30)$$

$$T(0,r)=T_0, \tag{2.31}$$

$$T(t,R)=T_s(t);\ \frac{\partial T(t,R_к)}{\partial r}=0, \tag{2.32}$$

де $T_s(t)$ — функція температури насичення a_1 — температуропровідність рідини; t, r — незалежні змінні за часом та просторовою координатою.

Приймемо до розгляду деяку функцію $\phi(t,r)=[1/(R_к-R)]\{[T(t,r)-T_0]r\}=(1/l)\{[T(t,r)-T_0]r\}$ та безрозмірні змінні

$$\vartheta=(r\text{-}R)/l;\ \varsigma=a_1 t/l^2, \tag{2.33}$$

де $l=(R_к-R)$ — лінійний розмір поперекового перерізу рухомої рідинної фази паро рідинного двофазового потоку.

Тоді постановка задачі (2.30) — (2.32) запишеться наступним чином:

$$\partial^2\phi(\varsigma,\vartheta)/\partial\vartheta^2=\partial\phi(\varsigma,\vartheta)/\partial\varsigma;\ 0\le\vartheta\le 1, \tag{2.34}$$

$$\phi(0,\vartheta)=0, \tag{2.35}$$

$$\phi(\varsigma,0)=(1/l)\{[T_s(t)-T_0]R\};\ \left[\frac{\partial\phi(\varsigma,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=1}-\frac{l}{R_к}\phi(\varsigma,1)=0. \tag{2.36}$$

Для спрощення подальших розмірковувань, перейдемо в (2.34) від дійсної змінної (оригіналу) ς до комплексної (зображення) s. Тоді отримаємо

$$\partial^2 F(s,\vartheta)/\partial\vartheta^2=sF(s,\vartheta), \tag{2.37}$$

$$F(s,0)=(R/l)\theta(s), \tag{2.38}$$

$$[\partial F(s,\vartheta)/\partial\vartheta]_{\vartheta=1}=(l/R_к)F(s,1), \tag{2.39}$$

де $F(s,\vartheta)$ — зображення функції $f(\varsigma,\vartheta)$, $\theta(s)$ — зображення функції $[T_s(t)-T_0]$.

Розв’язок задачі у зображеннях виду (2.37) — (2.39) має вигляд:

$$F(s,\vartheta)=(R/l)\theta\{\exp(-\sqrt{s})\times$$

$$\times\left[1-\frac{l/R_к-\sqrt{s}}{(\sqrt{s}/2)[\exp(\sqrt{s})+\exp(-\sqrt{s})]-(l/2R_к)[\exp(\sqrt{s})-\exp(-\sqrt{s})]}\right]+$$

$$+\exp\left(\sqrt{s}\right)\frac{l/R_{\text{к}}-\sqrt{s}}{\left(\sqrt{s}/2\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)+\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]-\left(l/2R_{\text{к}}\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)-\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]}\Bigg\},\quad(2.40)$$

причому похідна функції $F(s,\vartheta)$ по безрозмірній змінній ϑ визначиться як

$$\frac{\partial F(s,\vartheta)}{\partial\vartheta}=\left[(R/l)\theta\sqrt{s}\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\vartheta\sqrt{s}\right)\frac{l/R_{\text{к}}-\sqrt{s}}{\left(\sqrt{s}/2\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)+\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]-\left(l/2R_{\text{к}}\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)-\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]}-$$

$$-\exp\left(-\vartheta\sqrt{s}\right)\left\{1-\frac{l/R_{\text{к}}-\sqrt{s}}{\left(\sqrt{s}/2\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)+\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]-\left(l/2R_{\text{к}}\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)-\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]}\right\}.$$

(2.41)

В кінцевому рахунку задача полягає у визначенні градієнта температури (або, те саме — теплового потоку), що може бути представлено наступним чином:

$$\left[\frac{\partial T(t,r)}{\partial r}\right]_{r=R}=(1/R)\left\{\left[\frac{\partial\phi(\varsigma,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=0}-\frac{l}{R}\phi(\varsigma,0)\right\}.\qquad(2.41)$$

Використовуючи вирази (2.40) та (2.41) для образів $\left[\frac{\partial\phi(\varsigma,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=0}$ та $\phi(\varsigma,0)$ можна віднайти образ

$$\Im\left[\frac{\partial T(t,r)}{\partial r}\right]_{r=R}=\theta(s)G(s),$$

де

$$G(s)=$$

$$=\frac{1}{l}\left\{\frac{\sqrt{s}\left(l/R_{\text{к}}-\sqrt{s}\right)\exp\left(-\sqrt{s}\right)}{\left(\sqrt{s}/2\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)+\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]-\left(l/2R_{\text{к}}\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)-\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]}-\sqrt{s}-\frac{l}{R}\right\}.$$

(2.42)

Останнє рівняння може бути переписано наступним чином:

$$G(s)=$$

$$= \frac{\sqrt{s/a_1}\left(1/R_к + \sqrt{s/a_1}\right)\exp\left(^{-l\sqrt{s/a_1}}\right)}{\sqrt{s/a_1}\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)+\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]-\left(1/R_к\right)\left[\exp\left(\sqrt{s}\right)-\exp\left(-\sqrt{s}\right)\right]} - \sqrt{s/a_1} - \frac{1}{R} \quad (2.43)$$

або

$$G(s) = \sqrt{\frac{s}{a_1 t}}\left[\frac{\sqrt{s/a_1}+1/R_к}{\sqrt{s/a_1}-1/R_к}\exp\left(-2l\sqrt{s/a_1}\right)-1\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\left[\frac{\sqrt{s/a_1}+1/R_к}{\sqrt{s/a_1}-1/R_к}\exp\left(-2l\sqrt{s/a_1}\right)+1\right]} - \frac{1}{R}. \quad (2.44)$$

Виконані математичні перетворення дають змогу визначити тепловий потік q_1 у рідинній фазі. Для конкретності розглянемо випадок утворенні та розповсюдженні хвилі, зокрема, при гармонійному збудженні, коли $T \approx T\exp(j\omega t)$, $q_1 = -\lambda_1 T_0 \exp(j\omega t)G(j\omega)$. У разі гармонійного збудження, величини s, що входять у вирази для зображень, замінюються в оригіналі на $j\omega$ (це слушне мнемонічне правило переходу від образу до оригіналу [116]). У подальшому дослідимо асимптотично $G(s)$.

При $s \to \infty$ (або, відповідно, $\omega \to \infty; t \to 0$) $G(s) = G(\infty) = = \left(-\sqrt{s/a_1} - 1/R\right)$ і тепловий потік q_1, що відповідає цьому образу, а саме $\alpha/q_1 = \theta G(s)(-\lambda_1)$, визначається інтегралом (2.12). Таким чином коміркова модель дає вираз для теплового потоку q_1 при достатньо високих частотах, що співпадає з інтегралом (2.12).

В іншому граничному випадку, коли $s \to 0$ (або, якщо $\omega \to 0; t \to \infty$), розкладаючи експоненти (2.44) в ряд з точністю до s, можна отримати

$$G(s) = \frac{R_к R + l^2}{R^2}\frac{l}{a_1}s. \quad (2.45)$$

Враховуючи, що, як було вказано вище, $R_к^3/R^3 \approx \varphi << 1$ [47, 85], вираз (2.45) можна представити наступним чином: $G(s) = (R/\varphi a_1)s$.

Обчислимо тепловий потік q_1, переходячи від (2.45) до оригіналу:

— для гармонійного впливу

$$q_1 = \frac{-C_{P_1}\rho_1 R}{\varphi_0} T'(t,r)\, j\omega \exp(j\omega t); \tag{2.46}$$

— для довільного впливу

$$q_1 = \frac{-C_{P_1}\rho_1 R}{\varphi_0} \frac{\partial T(t,r)}{\partial t}. \tag{2.47}$$

За умови незначних амплітуд, спричинених збудженнями у вигляді додатного градієнту тиску, а також у разі, якщо виконується $\rho_2 \to \text{const}$, то вирази (2.46) та (2.27) можна представити через збудження тиску як

$$q_1 = \frac{-C_{P_1}\rho_1 R T_{s_0}}{\varphi_0 \rho_2 L} P'(t,r)\, j\omega \exp(j\omega t), \quad q_1 = \frac{-C_{P_1}\rho_1 R T_{s_0}}{\varphi_0 \rho_2 L} \frac{\partial P(t,r)}{\partial t}. \tag{2.48}$$

Вирази (2.48) можна використовувати для обчислення дисперсійної кривої при малих частотах хвилеутворення.

Візьмемо до уваги рівняння (2.11) та підставимо в нього друге рівняння (2.48). Тоді, в результаті очевидних перетворень

$$\frac{3\gamma P_0}{R\rho_2 L} \frac{\partial P(t,r)}{\partial t} = \frac{\gamma P_0 C_{P_1}\rho_1 T_{s_0} R}{R(\rho_2 L)^2 \varphi_0} \frac{\partial^2 P(t,r)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{c_0^2}{c_s^2} \frac{\partial^2 P(t,r)}{\partial t^2} \approx \frac{c_0^2}{c_s^2} \left[\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial t^2} + 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^4 P(t,\bar{x})}{\partial t^2\, \partial x_i^2} \right], \tag{2.49}$$

рівняння (2.11) (без врахування в'язкої дисипації) набуває наступного вигляду

$$\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2/c_s^2\right)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \cdot \frac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2/c_s^2\right)} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P(t,\bar{x})}{P_0} \right]^2 - 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^4 P(t,\bar{x})}{\partial t^2\, \partial x_i^2} = 0. \tag{2.50}$$

Рівняння (2.50) описує динаміку розповсюдження хвиль у пароріднній двофазній системі зі швидкістю, що дорівнює термодинамічно рівноваговій

швидкості звуку c_s, а доповнене відповідними початковими та граничними умовами, утворює *рівновагову коміркову* ММ для зазначеного випадку.

Нерівновагова математична модель. Сформулюємо *нерівновагову коміркову* ММ, що буде враховувати витрати енергії як на фазові переходи в самій двофазній системі, так і на зовнішнє її випромінювання.

Аналогічно випадку описаному в розділі 2.1, при складанні нерівновагової ММ скористаємося процедурою отримання рівнянь динаміки на основі апарату варіаційних нерівностей, запропонованою у роботі [106]. При цьому, як і раніше будемо вважати, що шукана функція $P(t,\bar{x})$, $\bar{x}=(x_1,x_2)$ є гармонійною функцією в Ω, де Ω — відкрита обмежена область в $\Re^n$ $(n=\overline{1,2})$ з границею Γ, а $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\Gamma$ задає замикання Ω, причому функція $P(t,\bar{x})$ є розв'язком рівняння динаміки (2.50) з початковими та граничними умовами виду (2.16) та (2.17), відповідно.

Для зручності подальшого розгляду рівняння (2.50) представимо наступним чином (скориставшись правилами розділення змінних):

$$\left[1-2\beta_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial x_i^2}\right]\cdot\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial x_i^2}-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P(t,\bar{x})}{P_0}\right]^2\right\}=0$$

або

$$\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial x_i^2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P(t,\bar{x})}{P_0}\right]^2\right\}. \qquad (2.51)$$

Уведемо до розгляду пробну функцію $v_P(t,\bar{x})$, визначену на просторі (Соболєва) $H^1(\Omega)$. Виконуючи скалярне множення (2.51) на (v_P-P) (для

простоти запису опустимо далі аргументи у шуканих функцій) і, скориставшись формулою Гріна [129], отримаємо

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, v_P - P\right) =$$

$$= \frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2/c_s^2\right)}}{\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}, v_P - P\right)} \int\limits_{\Omega} \left(\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P}{P_0} \right]^2 \right\}, v_P - P \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial \eta}, v_P - P \right) d\Gamma; \quad \forall v_P \geq 0 \big|_{x \in \Gamma}. \tag{2.52}$$

Таким чином, в якості опуклої множини K допустимих функцій може бути обрано множину невід'ємних v_P таких, що

$$K = \left\{ v_P \in H^1(\Omega) \big|_{v_P \geq 0}, x \in \Gamma \right\}.$$

Виконуючи в (2.52) заміну змінної v_P на $(-v_P)$ в результаті отримаємо:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, v_P - P\right) \leq$$

$$\leq \frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2/c_s^2\right)}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}} \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P}{P_0} \right]^2 \right\} dx +$$

$$+ \frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2/c_s^2\right)}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} |v_P|} \int\limits_{\Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} |v_P| - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P}{P_0} \right]^2 |v_P| \right\} dx -$$

$$- \frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2/c_s^2\right)}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} |P|} \int\limits_{\Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} |P| - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P}{P_0} \right]^2 |P| \right\} dx; \quad \forall v_P, P \in K_P. \tag{2.53}$$

Визначимо білінійну форму

$$a\left(P, v_P - P\right) = \frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2 / c_s^2\right)}}{1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P}{P_0} \right]^2 \right\} dx \qquad (2.54)$$

та функціонали

$$\mathbf{j}\left(v_P\right) = \frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2 / c_s^2\right)}}{1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} \left| v_P \right|} \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} \left| v_P \right| - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P}{P_0} \right]^2 \left| v_P \right| \right\} dx, \qquad (2.55)$$

$$\mathbf{j}\left(P\right) = \frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1 + c_0^2 / c_s^2\right)}}{1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} \left| P \right|} \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} \left| P \right| - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\frac{\Delta P}{P_0} \right]^2 \left| P \right| \right\} dx, \qquad (2.56)$$

Тоді, в результаті очевидних перетворювань, можна отримати наступну варіаційну нерівність:

$$P \in K : \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, v_P - P \right) \le a\left(P, v_P - P\right) + \mathbf{j}\left(v_P\right) - \mathbf{j}\left(P\right), \quad \forall v_P \in K_P. \qquad (2.57)$$

Покажемо єдиність розв’язку задачі (2.57).

Вочевидь білінійна форма (2.54) та (2.21) є *коерцитивною*. Дійсно, білінійна форма (2.57) визначається лінійним оператором

$$a\left(P, v_P - P\right) = \left\langle AP, v_P - P \right\rangle; \qquad (2.58)$$

який задає відображення $A : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ в смислі елементів v_P, $P \in H^1(\Omega)$. На підставі уведених вище визначень функцій v_P та P очевидно, що $\left\| v_P - P \right\| \to 0$. Тоді справедливим є твердження

$$\frac{\left\langle Av_P - AP, v_P - P \right\rangle}{\left\| v_P - P \right\|^2} \to \infty; \quad \forall v_P, P \in H^1(\Omega)$$

звідки випливає коерцитивність білінійної форми (2.57) [64], тобто існує таке $\alpha_P > 0$, що

$$a_P(v_P - P, v_P - P) \geq \alpha_P \|v_P - P\|^2; \ \forall v_P, P \in H^1(\Omega).$$

Нехай P_1, P_2 — деякі розв'язки задачі (2.53), що відповідають правим (за визначенням — нульовим) частинам нерівності (2.53). Тоді очевидною є умова

$$\|P_1 - P_2\| \leq (1/\alpha_P)\|0\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow \|P_1 - P_2\| = 0,$$

що свідчить про єдиність розв'язку задачі (2.57).

Покажемо, що функціонали $\mathbf{j}(v_P)$ та $\mathbf{j}(P)$ є опуклими (тобто диференціюються та мають екстремум).

Певний функціонал $\mathbf{f}(\xi)$ вважається опуклим на множині K [117], якщо від не приймає значення $-\infty$ та при цьому виконується умова

$$\mathbf{f}((1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2) \leq (1-\alpha)\mathbf{f}(\xi_1) + \alpha\mathbf{f}(\xi_2), \ 0 \leq \alpha \leq 1, \ \forall \xi_1, \xi_2 \in K. \quad (2.59)$$

Запишемо умову (2.59) для функціонала $\mathbf{j}(v_P)$:

$$\frac{\dfrac{c_0^2}{(1 + c_0^2/c_s^2)}}{1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|(1-\alpha)v_{P_1} + \alpha v_{P_2}\right|} \int_\Gamma \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|(1-\alpha)v_{P_1} + \alpha v_{P_2}\right| - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2 \left|(1-\alpha)v_{P_1} + \alpha v_{P_2}\right| \right\} dx \leq$$

$$\leq (1-\alpha) \frac{\dfrac{c_0^2}{(1 + c_0^2/c_s^2)}}{1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}\right|} \int_\Gamma \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}\right| - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2 \left|v_{P_1}\right| \right\} dx +$$

$$+ \alpha \frac{\dfrac{c_0^2}{(1 + c_0^2/c_s^2)}}{1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P2}\right|} \int_\Gamma \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_2}\right| - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2 \left|v_{P_2}\right| \right\} dx. \quad (2.60)$$

Покажемо, що (2.60) виконується. Нехай $v_2 = v_1 + \varphi$. Тоді можна отримати

$$\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|}\int_\Gamma\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|\right\}dx\le$$

$$\le(1-\alpha)\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}\right|}\int_\Gamma\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}\right|-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2\left|v_{P_1}\right|\right\}dx+$$

$$+\alpha\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|}\int_\Gamma\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|\right\}dx.$$

Перетворюючи останній вираз (тобто приводячи подібні члени та враховуючи заміну $v_2=v_1+\varphi$), приходимо до рівності

$$\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|}\int_\Gamma\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|v_{P_1}+\alpha\varphi\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2 v_{P_1}+\alpha\varphi\right\}dx=$$

$$=\alpha\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|\varphi\right|}\int_\Gamma\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}\left|\varphi\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P}{P_0}\right]^2\left|\varphi\right|\right\}dx.$$

Тобто, умова опуклості функціонала $\mathbf{j}(v_P)$ виконується.

Аналогічний висновок можна отримати і для функціонала $\mathbf{j}(P)$.

Таким чином, варіаційна нерівність (2.57) описує коміркову модель для пароріднинних двофазних системах у разі *наявності теплових втрат* як на фазові переходи в самій двофазній системі, так і на зовнішнє її випромінювання, тобто являє собою *нерівновагову* ММ для даного випадку.

2.3. Математичні моделі динамічних станів пароріднинних двофазних систем з границею розділу компонент у рідинній складовій

На практиці досить поширеним є випадок, коли рідинна система являє собою суміш рідин з відмінними фізико-хімічними властивостями, зокрема: з різними густинами, з різними температурами кипіння, з наявністю емульсованих домішок, з несхожою в'язкою (реологічною) поведінкою тощо. Типовими прикладами сумішей таких рідин можуть бути:

— природні рідкі вуглеводні, які складаються з фракцій з різними густинами та температурами кипіння;

— водо-оливні емульсії, які можуть, при зміні динамічного стану (швидкості плину), розділятися на рідини, що не змішуються та мають різні густини;

— колоїдні та полімерні розчини, складові яких мають різну реологічну поведінку, тобто виявляють характер «ньютонівської» (такої, що не стискається, чи, інакше, такої, для якої густина не залежить від швидкості плину) або «ненютонівської» (такої, що стискається, чи, інакше, такої, для якої густина залежить від швидкості плину) рідини.

При цьому зазначимо, що окремим явищем динаміки пароріднинної двофазної системи слід розглядати наявність у її рідинній складові двох шарів рідин з різними фізико-хімічними властивостями. Специфіка плину таких пароріднинних двофазних систем полягає [47, 85] у наявності вільної границі, на якій може відбуватися розвиток нестійкості та хвилеутворення, а також процеси теплообміну та тертя з паровою фазою.

Випадок утворення шарів рідинної складової ньютонівськими рідинами. Постановка та схема задачі, посилаючись на результати робіт [47, 85], виглядають наступним чином (для конкретності розгляду приймемо, що рідинна складова містить дві рідини, які утворюють два шари — один над іншим, а температури кипіння обох рідин не нижче температури їх суміші у потоці, який рухається). Пароріднинна система (рис. 2.3) в середньому покоїться або перебуває

в русі з прискоренням у напрямку x_2 (напрямок по нормалі до поверхні розділу фаз); густина нижньої рідини дорівнює ρ_{p_1}, а верхньої — ρ_{p_2}; координату x_1 спрямовано уздовж поверхні розділу. Виникнення в такій системі збудження на границі розділу середовищ називається [115] *нестійкістю за Релеєм—Тейлором*.

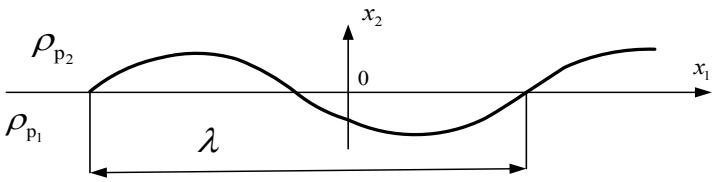


Рис. 2.3. — Схема виникнення збуджень на границі розділу компонент у рідинній складовій [115]

Вважається, що шари рідин у рідинній складовій являють собою в'язкі (тобто ньютонівські) рідини, які розрізняються густинами ρ_{p_1} та ρ_{p_2}. Двовимірний рух шарів ньютонівських рідин, що утворюють рідинну складову пароріднної двофазної системи описується наступним чином (з урахуванням результатів робіт [47, 85], поширивши їх на багатовимірний випадок):

$$-\frac{\partial P_{p_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_1}=\rho_{p_j}\frac{\partial P_{p_j}(t,\mathbf{x})}{\partial t};\ -\frac{\partial P_{p_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_2}=\rho_{p_j}\left[\frac{\partial P_{p_j}(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\mathbf{g}\right];$$

$$\frac{\partial P_{p_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_1}+\frac{\partial P_{p_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_2}=0, \qquad (2.61)$$

де $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ — двовимірний вектор просторових координат, $\mathbf{g}=(g_1,g_2)$ — вектор прискорення хвилі у напрямах відповідних координат, $j=\overline{1,2}$ — індекси, що відповідають середовищам (рідинам) з різними густинами.

За умови відсутності середнього значення, та з урахуванням напрямку координати x_2 у бік, протилежний напрямку вектора $\mathbf{g}$,

$$P_{p_j}(t,\mathbf{x})=P_{гр}-\mathbf{g}\rho_{p_j}x_2, \qquad 2.62)$$

де $P_{гр}$ — тиск на границі розділу шарів з густинами ρ_{p_1} та ρ_{p_2}.

Стаціонарний тиск зменшується догори від границі розділу шарів і зростає донизу від неї. Рівняння для збуджень тиску та швидкості можуть бути записані у вигляді

$$-\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_1}=\frac{1}{\rho_{\mathrm{p}_j}}\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial t};\ -\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_2}=\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial t};$$

$$\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_1}+\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_2}=0;\ j=\overline{1,2}. \qquad (2.63)$$

Оскільки розглядаються ідеальні (ньютонівські) рідини, то на границі розділу шарів існує лише нормальні напруження, які однакові по модулю; також дорівнюють один одному і нормальні компоненти швидкості плину:

$$P'_{\mathrm{гр}_1}=P'_{\mathrm{гр}_2}=-\sigma\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\delta'}{\partial^2 x_i};\ u'_1=u'_2=\partial\delta'/\partial t, \qquad (2.64)$$

де δ' — збудження границі по координатах для плаского випадку; $\sigma\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\delta'}{\partial^2 x_i}$ — огинаюча поверхні збудженої границі у обраній точці; σ — коефіцієнт поверхневого натягу на границі розділу.

Виходячи з означеної постановки необхідно сформулювати ММ динамічного стану пароріднинної двофазної системи, якщо рідинну складову утворюють дві ньютонівські рідини з різними густинами ρ_{p_1} та ρ_{p_2}.

При $x_2=\delta'$ маємо умову рівності збуджених нормальних напружень:

$$P'_{\mathrm{p}_1}+\mathbf{g}\left(\rho_{\mathrm{p}_1}-\rho_{\mathrm{p}_2}\right)\delta'=P'_{\mathrm{p}_2}-\sigma\frac{\partial^2\delta'}{\partial x_1}. \qquad (2.65)$$

Особливість динамічного процесу в даному випадку полягає в тому, що область Ω_{p} спільного руху обох шарів рідинної складової пароріднинної двофазної системи слід розглядати як сукупність двох підобластей Ω_{p_1} і Ω_{p_2} зі спільною границею Γ_{p}, зайнятих відповідно рідиною 1 та рідиною 2. Враховуючи, що обидві рідини є ньютонівськими, то динамічні процеси в підобластях Ω_{p_1} та Ω_{p_2} будуть підпорядковуватися лінійному закону Дарсі для в'язких рідин [98, 99].

Відрізок координати x_1, на якому розглядається динамічний процес, будемо вважати кінцевим, а тому підобласті $\Omega_{\text{р}_1}$ та $\Omega_{\text{р}_2}$ можна розглядати як замкнуті. В подальшому будемо вважати, що підобласті $\Omega_{\text{р}_1}$ та $\Omega_{\text{р}_2}$ є обмеженими підобластями у $\Re^n$, $n=2$. Умови взаємовпливу рідини 1 та рідини 2 при динамічному русі двофазної системи в значній мірі визначають форму границі $\Gamma_{\text{р}}$. Якщо густини $\rho_{\text{р}_1}$ та $\rho_{\text{р}_2}$ значно відрізняються між собою (наприклад, $\rho_{\text{р}_1} >> \rho_{\text{р}_2}$), то, вочевидь, не буде «перемішування» шарів рідин 1 та 2, а границя $\Gamma_{\text{р}}$ буде «гладкою». В іншому випадку ($\rho_{\text{р}_1} \approx \rho_{\text{р}_2}$) може мати місце «перемішування» шарів рідин 1 та 2, а границя $\Gamma_{\text{р}}$ може набути розривів 1 роду (або, навіть, втратити «регулярність»), що виключить аналітичну постановку задачі (очевидним шляхом формалізації задачі в даному випадку є розгляд рідинної складової двофазної системи як гетерогенної суміші, але з усередненою густиною $\rho_{\text{ус}}$).

При складанні ММ за шукані функції для рідинної складової оберемо розподілені функції насиченості $S_{\text{р}_1}(t,\mathbf{x})$ та $S_{\text{р}_2}(t,\mathbf{x})$ рідинами 1 та 2, які показують їх частки у загальному рідинному потоці. В роботі [106] було розроблено ММ взаємофільтрації двофазних рідин в пористих середовищах, складену відносно функцій насиченостей окремих фаз. Беручи за основу дану ММ (зокрема, процедури складання рівнянь збереження маси та енергії), і враховуючи якісні особливості фізичного процесу руху пароріднинного двофазного середовища, що розглянуто вище, запропонуємо наступну систему диференційних рівнянь, яка описує динамічний стан рідинної складової у цьому випадку (для пласкої системи, $i=2$)

$$\frac{\partial S_{\text{р}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma \frac{dP_{\text{к}}}{dS_{\text{р}_j}} \cdot \frac{\partial S_{\text{р}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}\right] - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma \frac{\partial P'_{\text{р}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}\right];\ j=\overline{1,2} \qquad (2.66)$$

з початковими

$$S_{\text{р}_j}(0,\mathbf{x}) = S_{\text{р}_{0j}}(\mathbf{x}) \qquad (2.67)$$

та граничними умовами

$$\frac{\partial S_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial \eta} = f_{\mathrm{p}_j}(\mathbf{x});\;\; S_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x}) \le S_{\mathrm{p}_{j\max}}, \tag{2.68}$$

де $P_{\mathrm{к}} = P_1'(t,\mathbf{x}) - P_2'(t,\mathbf{x})$ — капілярний тиск (що являє собою алгебраїчну різницю збуджень тисків для шарів рідин 1 та 2), $f_j(\mathbf{x})$ — певні визначені функції на границі Γ_{p} ($0 \le f_{\mathrm{p}_j}(\mathbf{x}) \le 1,\;\; j = \overline{1,2}$) η — нормаль до границі Γ_{p}.

Для врахування у ММ пароріднинної двофазної системи, яка будується, парової складової доповнимо систему (2.66) — (2.68) рівнянням виду (2.11) щодо збудження тиску $P'(t,\mathbf{x})$ пароріднинної суміші (очевидно, що $P'(t,\mathbf{x}) = \left\{\left[S_{\mathrm{p}_1}(t,\mathbf{x}) P_{\mathrm{p}_1}(t,\mathbf{x}) + S_{\mathrm{p}_{21}}(t,\mathbf{x}) P_{\mathrm{p}_2}(t,\mathbf{x})\right] / (1-\varphi)\right\}$, де φ — об'ємний паровміст). При цьому приймемо, що парова складова являє собою гетерогенну суміш випаровувань рідин 1 та 2 однорідної концентрації з усередненою густиною $\rho_{\mathrm{г}}$:

$$\frac{\partial^2 P'(t,\mathbf{x})}{\partial t^2} - c_0^2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 P'(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \cdot c_0^2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P'^2(t,\mathbf{x})}{P_0}\right] =$$

$$= 2\beta_1 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^4 P'(t,\mathbf{x})}{\partial t^2\, \partial x_i^2} - \frac{4\mu}{3\rho_{\mathrm{г}}\varphi} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^3 P'(t,\mathbf{x})}{\partial t\, \partial x_i^2};\;\; P'(0,\mathbf{x}) = P_0'(\mathbf{x}), \tag{2.69}$$

де смисл наведених змінних співпадає з аналогічними, зазначеними вище у розділі 2.1.

Система рівнянь (2.66) — (2.69) утворює шукану ММ динамічного стану пароріднинних двофазних систем у випадку, коли рідинна складова має декілька шарів ньютонівських рідин.

Доведемо існування та єдиність розв'язку задачі (2.66) — (2.68).

Теорема 2.1. Нехай граничні умови (2.68), які визначають крайову задачу для системи рівнянь (2.66) з початковим розподілом (2.67), являють собою аналітичні функції просторових координат вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Тоді, якщо праві частини системи (2.66) є аналітичними або кусково-гладкими функціями всіх своїх аргументів в околі точки їх числових значень (що відповідають $t_0 = 0$ в силу

початкових умов), то в околі цієї точки t_0 існує розв'язок крайової задачі для системи (2.66), причому цей розв'язок буде єдиним.

Для системи (2.66) — (2.68) представимо задачу у нормальній формі відносно змінної t:

$$\frac{\partial S_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial t}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{dP_{\mathrm{к}}}{dS_{\mathrm{p}_j}}\cdot\frac{\partial S_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}\right]-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_j}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}\right];\ j=\overline{1,2} \qquad (2.70)$$

$$S_{\mathrm{p}_j}(t_0,\mathbf{x})=\left[S^0_{\mathrm{p}_j}(\mathbf{x})\right]\ . \qquad (2.71)$$

Доведення теореми 2.1. Розв'язок крайової задачі (2.70), (2.71) може бути представлено кінцевою сумою наступним чином (для спрощення запису залежність шуканих функцій насиченості від вектора просторових координат опущено):

$$S_{\mathrm{p}_j}=\sum_{k_0,k_1,\ldots,k_m}^{m}C^j_{k_0,k_1,\ldots,k_m}(t-t_0)^{k_0}\times\left(S_{\mathrm{p}_{j1}}-S^0_{\mathrm{p}_{j1}}\right)^{k_1}\times\ldots\times\left(S_{\mathrm{p}_{j1m}}-S^0_{\mathrm{p}_{jm}}\right)^{k_m};$$

$$j=\overline{1,2}, \qquad (2.72)$$

де $C^j_{k_0,k_1,\ldots,k_m}$ — постійні ($k_0,k_1,\ldots,k_m$ — порядкові номери гармонік, зумовлених збудженням при хвилеутворенні); m — їх (постійних) число.

Причому, якщо розв'язок (2.72) існує, то він єдиний. Очевидно, що коефіцієнти $C^j_{0,k_1,\ldots,k_m}$ визначаються з початкових умов $S_{\mathrm{p}_j}\Big|_{t=0}=S^0_{\mathrm{p}_j}$ шляхом диференціювання останніх в точці $\left(t_0,S^0_{\mathrm{p}_j}\right)$ по змінних $S^0_{\mathrm{p}_{j1}},\ldots,S^0_{\mathrm{p}_{jm}}$ відповідно до числа гармонік (тобто $k_1,k_2,\ldots,k_m$ раз). Коефіцієнти $C^j_{1,k_2,\ldots,k_m}$ визначаються із системи (2.72) шляхом диференціювання по змінних $S^0_{\mathrm{p}_{j1}},\ldots,S^0_{\mathrm{p}_{jm}}$ з урахуванням вже віднайденої постійної $C^j_{0,k_1,\ldots,k_m}$. Постійну $C^j_{2,k_3,\ldots,k_m}$ можна визначити із системи (2.72) шляхом диференціювання по змінних $S^0_{\mathrm{p}_{j1}},\ldots,S^0_{\mathrm{p}_{jm}}$ та один раз по t. Очевидно, що наступні постійні ($C^j_{3,k_3,\ldots,k_m},\ldots,C^j_{k_m}$) визначаються так само, але систему рівнянь (2.72) слід буде диференціювати по t $(m-1)$ раз. Таким чином,

система рівнянь (2.72) та початкові умови (2.71) *однозначно* визначають коефіцієнти розкладання (2.72), а тому, відповідно, двох (зокрема, аналітичних) розв'язків бути не може.

Для доведення існування розв'язку достатньо показати, що ряди, складені відповідно до виразу (2.72, збігаються, тобто, являють собою шуканий розв'язок. Зазначимо, що тут постійні $C^{j}_{k_0,k_1,...,k_m}$ отримуються з розкладань правих частин (2.70) та коефіцієнтів розкладань початкових умов (2.71) тільки за допомогою операцій додавання та множення. Через значну кількість складових (що визначається кількістю $k_0, k_1, ..., k_m$ гармонік, які зумовлюють збудження при хвилеутворенні, і які взяти до розгляду) шуканий розв'язок у вигляді ряду може збігатися повільно. Тому, без втрати коректності доведення вище сформульованої теореми, достатньо показати, що шуканий розв'язок приводить до рядів, які збігаються для деякої допоміжної системи, праві частини якої є мажорантами до правої частини (2.72), а початкові умови (2.67) — мажорантами до функцій $S^0_{\mathrm{p}_j}$, відповідно. Це означає, що коефіцієнти розкладань правих частин допоміжної системи мають бути більшими абсолютних значень відповідних коефіцієнтів розкладань правих частин (2.72), а коефіцієнти розкладань початкових умов допоміжної системи — більше за абсолютні значення відповідних коефіцієнтів розкладань функції $S^0_{\mathrm{p}_j}$.

Для простоти розгляду приймемо, що початкові умови є нульовими, тобто $t_0 = 0$; $S^0_{\mathrm{p}_{j1}} = S^0_{\mathrm{p}_{j2}} = ... = S^0_{\mathrm{p}_{jm}} = 0$. В іншому випадку достатньо виконати заміну $t = t - t_0$; $S_{\mathrm{p}_{jm}} = S_{\mathrm{p}_{jm}} - S^0_{\mathrm{p}_{jm}}$. Приймемо також, що вільні члени у розкладеннях правої частини (2.70) дорівнюють нулю, оскільки в іншому випадку достатньо зробити заміну $S_{\mathrm{p}_{jm}} = S_{\mathrm{p}_{jm}} - S_m t$, де S_m — постійні.

В реальній фізичній картині хвилеутворення для пароріднної системи існує максимальне значення амплітуди хвилі $A_{\max}$, зумовлене прикладеним збудженням (наприклад, перепадом тиску $\Delta P = P - P_0$). Очевидно, що $A_{\max}$ є

таким, для якого всі члени рядів розкладання системи (2.70) задовольняють наступній умові:

$$\left| \left. \frac{\partial S_{\mathrm{p}_{jl}}}{\partial t} \right|_{\substack{t\in(o,t_k)\\ \mathbf{x}=(x_1,x_2)}} \in \Xi_l\left(S_{\mathrm{p}_{jl}}\right) \right| \le A_{\max},\ \forall l=\overline{1,m};\ j=1,2\,.$$

Уведемо для подальших розгляду деяке число M, яке $\mathrm{M} \ge A_{\max}$. Можна стверджувати, що уведення числа M не впливає на фізичну картину процесу хвилеутворення, який розглядається. Тоді, в якості мажоранти для всіх Ξ_l; $l=\overline{1,m}$ можна взяти функцію

$$T\left(\Xi_l\right)=\frac{A_{\max}}{\left(1-\dfrac{t}{\mathrm{M}}\right)\left(1-\dfrac{S_{\mathrm{p}_{j1}}}{\mathrm{M}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{S_{\mathrm{p}_{jm}}}{\mathrm{M}}\right)}-A_{\max},\ \forall l=\overline{1,m};\ j=1,2\,.$$

Тоді можна показати, що

$$T\left(\Xi_l\right)=\frac{A_{\max}}{\left(1-\dfrac{t}{\mathrm{M}}\right)\left(1-\dfrac{S_{\mathrm{p}_{j1}}}{\mathrm{M}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{S_{\mathrm{p}_{jm}}}{\mathrm{M}}\right)}=A_{\max}\frac{1}{1-\dfrac{S_{\mathrm{p}_{j1}}+S_{\mathrm{p}_{j2}}+\ldots+S_{\mathrm{p}_{jm}}}{\mathrm{M}}},$$

$$\forall l=\overline{1,m};\ j=1,2\,, \qquad (2.73)$$

причому права частина (2.73) — збігається, і може виступати мажорантою лівої частини (2.72). Звідси робимо висновок, що формальний процес складання рядів (2.72) у застосуванні до вихідної системи (2.70), (2.71) буде призводити до рядів, які збігаються.

Таким чином теорему 2.1. доведено.

Випадок утворення шарів рідинної складової з неньютонівськими рідинами. Розглянемо побудову ММ динамічного стану пароріднинних двофазних систем з границею розділу компонент у рідинній складовій у разі, коли рідинна складова містить рідини з різними реологічним характером. Найбільш поширеним прикладом при цьому слід вважати утворення рідинної складової шарами ньютонівської та неньютонівської рідин.

Для побудови ММ в даному випадку виконаємо наступне. Приймемо, що рідина 1 в рідинній складовій має ньютонівський характер (тобто є в'язкою рідиною), а рідина 2 — має неньютонівський характер (тобто виявляє в'язко-пластичні властивості). Відповідно до цього, для в'язкої компоненти (рідини 1 і, тим самим, $j=1$) рідинної складової рівняння динаміки, початкові та граничні умови зберігають вигляд, аналогічний системі (2.66) — (2.68), а саме:

$$\frac{\partial S_{\mathrm{p}_1}(t,\mathbf{x})}{\partial t}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{dP_{\mathrm{к}}}{dS_{\mathrm{p}_j}}\cdot\frac{\partial S_{\mathrm{p}_1}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}\right]-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\mathrm{p}_1}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}\right] \tag{2.74}$$

з початковими

$$S_{\mathrm{p}_1}(0,\mathbf{x})=S_{\mathrm{p}_{01}}(\mathbf{x}) \tag{2.75}$$

та граничними умовами

$$\frac{\partial S_{\mathrm{p}_1}(t,\mathbf{x})}{\partial\eta}=f_{\mathrm{p}_1}(\mathbf{x});\;\; S_{\mathrm{p}_1}(t,\mathbf{x})\le S_{\mathrm{p}_{1\max}}, \tag{2.76}$$

тоді як для в'язко-пластичної компоненти (рідина 2, $j=2$) початкові та граничні умови набудуть вигляду

$$S_{\mathrm{p}_2}(0,\mathbf{x})=S_{\mathrm{p}_{02}}(\mathbf{x}) \tag{2.77}$$

$$\frac{\partial S_{\mathrm{p}_2}(t,\mathbf{x})}{\partial\eta}\ge 0;S_{\mathrm{p}_2}(t,\mathbf{x})\Big|_{\bar{x}\in\Gamma}<S_{\mathrm{p}_{2\max}}\;\text{ та }\;\frac{\partial S_{\mathrm{p}_2}(t,\mathbf{x})}{\partial\eta}=0;S_{\mathrm{p}_2}(t,\mathbf{x})\Big|_{\bar{x}\in\Gamma}\ge S_{\mathrm{p}_{2\max}} \tag{2.78}$$

Щодо отримання рівняння динаміки для рідини 2 виконаємо наступне. Для рівняння з індексом $j=2$ в системі (2.66) введемо до розгляду пробну функцію $v=v(t,\mathbf{x}),\forall v\in K, K=\{(v,v)\ge 0\text{ в }\Omega_{\mathrm{p}_2}\}$. Скалярно помножимо рівняння з індексом $j=2$ в системі (2.66) на $\left(v-S_{\mathrm{p}_2}\right)$ і, застосувавши до нього формулу Гріна, отримаємо (далі, для простоти запису, незалежні часовий t та просторові $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ параметри у функцій опустимо)

$$\frac{\partial S_{\mathrm{p}_2}}{\partial t}\cdot\left(v-S_{\mathrm{p}_2}\right)=\int\limits_{\Omega_{\mathrm{p}_2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{dP_{\mathrm{к}}}{dS_{\mathrm{p}_2}}\cdot\frac{\partial S_{\mathrm{p}_2}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_{\mathrm{p}_2}\right)}{\partial x_i}\right]dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_{\text{р}_2}\right)}{\partial x_i}\right]dx+\int\limits_{\Gamma_{\text{р}}}\left[\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial\eta}\cdot\left(v-S_{\text{р}_2}\right)\right]d\Gamma_{\text{р}};\ \ \forall v,S_{\text{р}_2}\in K. \qquad (2.79)$$

Виконаємо в (2.79) заміну змінної v на $(-v)$, в результаті чого запишемо варіаційну нерівність, що визначає динаміку рідини 2:

$$\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial t}\cdot\left(v-S_{\text{р}_2}\right)=\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{dP_{\text{к}}}{dS_{\text{р}_2}}\cdot\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_{\text{р}_2}\right)}{\partial x_i}\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}|v|\right]dx-\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\left|S_{\text{р}_2}\right|\right]dx\geq 0;\ \ \forall v,S_{\text{р}_2}\in K. \quad (2.80)$$

Для врахування у ММ пароріднинної двофазної системи, яка будується, парової складової доповнимо систему (2.74) — (2.80) рівнянням (2.69) щодо збудження тиску $P'(t,\bar{x})$.

Вирази (2.74) — (2.80), (2.69) утворюють шукану ММ динамічного стану пароріднинних двофазних систем у випадку, коли рідинна містить рідини з різними реологічним характером.

Доведемо існування та єдиності задачі (2.74) — (2.80), як і у попередньому випадку, шляхом формулювання та доведення наступної теореми.

Теорема 2.2. Нехай граничні умови (2.78), які визначають крайову задачу для системи рівнянь (2.74) з початковим розподілом (2.75), являють собою аналітичні функції просторових координат вектора $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$. Тоді, якщо праві частини системи (2.74) є аналітичними або кусково-гладкими функціями всіх своїх аргументів в околі точки їх числових значень (що відповідають $t_0=0$ в силу початкових умов), то в околі цієї точки t_0 існує розв'язок кураєвої задачі для системи (2.74), причому цей розв'язок буде єдиним.

Для варіаційної нерівності (2.80) виконаємо очевидні перетворення:

$$\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial t}\cdot\left(v-S_{\text{р}_2}\right)=\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{dP_{\text{к}}}{dS_{\text{р}_2}}\cdot\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_{\text{р}_2}\right)}{\partial x_i}\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}|v|\right]dx-\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\left|S_{\text{р}_2}\right|\right]dx-$$

$$-\left\{\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}|v|\right]dx-\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\left|S_{\text{р}_2}\right|\right]dx\right\}=0,$$

$$\left\{\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}|v|\right]dx-\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\left|S_{\text{р}_2}\right|\right]dx\right\}\geq 0;\ \ \forall v,S_{\text{р}_2}\in K\,. \quad (2.81)$$

Визначимо білінійну форму

$$a\left(S_{\text{р}_2},v-S_{\text{р}_2}\right)=\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{dP_{\text{к}}}{dS_{\text{р}_2}}\cdot\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_{\text{р}_2}\right)}{\partial x_i}\right]dx$$

та функціонали

$$\mathbf{j}\left(S_{\text{р}_2}\right)=\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\left|S_{\text{р}_2}\right|\right]dx,$$

$$\mathbf{j}(v)=\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}|v|\right]dx,$$

а також уведемо позначення

$$\theta\left(S_{\text{р}_2},v\right)=\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}|v|\right]dx-\int\limits_{\Omega_{\text{р}2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma\frac{\partial P'_{\text{р}_2}}{\partial x_i}\left|S_{\text{р}_2}\right|\right]dx.$$

З урахуванням цього, варіаційну нерівність можна представити наступним чином:

$$S_{\text{р}_2}\in K:\left(\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial t},v-S_{\text{р}_2}\right)-a\left(S_{\text{р}_2},v-S_{\text{р}_2}\right)-\mathbf{j}(v)+\mathbf{j}\left(S_{\text{р}_2}\right)+\theta\left(S_{\text{р}_2},v\right)=0,$$

$$\theta\left(S_{\text{р}_2},v\right)\geq 0;\ \ \forall v,S_{\text{р}_2}\in K\,. \quad (2.82)$$

Відносно шуканої функції $S_{\text{р}_2}$ (2.82) запишеться так

$$S_{\text{р}_2}\in K:\left(\frac{\partial S_{\text{р}_2}}{\partial t},S_{\text{р}_2}\right)-a\left(S_{\text{р}_2},S_{\text{р}_2}\right)+\mathbf{j}\left(S_{\text{р}_2}\right)+\theta\left(S_{\text{р}_2},S_{\text{р}_2}\right)=0,$$

$$\theta\left(S_{\text{р}_2},S_{\text{р}_2}\right)\geq 0;\ \ \forall S_{\text{р}_2}\in K\,. \quad (2.83)$$

Тоді для (2.74), (2.83) можна записати задачу в нормальній формі відносно змінної t:

$$\frac{\partial S_{\mathrm{p}_1}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma \frac{dP_{\mathrm{к}}}{dS_{\mathrm{p}_1}} \cdot \frac{\partial S_{\mathrm{p}_1}}{\partial x_i} \right] - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma \frac{\partial P'_{\mathrm{p}_1}}{\partial x_i} \right], \tag{2.84}$$

$$S_{\mathrm{p}_2} \in K : \left(\frac{\partial S_{\mathrm{p}_2}}{\partial t}, S_{\mathrm{p}_2} \right) - a\left(S_{\mathrm{p}_2}, S_{\mathrm{p}_2}\right) + \mathbf{j}\left(S_{\mathrm{p}_2}\right) + \theta\left(S_{\mathrm{p}_2}, S_{\mathrm{p}_2}\right) = 0,$$

$$\theta\left(S_{\mathrm{p}_2}, S_{\mathrm{p}_2}\right) \geq 0; \ \ \forall S_{\mathrm{p}_2} \in K. \tag{2.85}$$

$$S_{\mathrm{p}_1}\Big|_{t=t_0} = \left[S^0_{\mathrm{p}_1} \right] . \tag{2.86}$$

Очевидно, що для крайової задачі (2.84) — (2.86) розв’язок може бути представлено у вигляді ряду, подібно (2.72), звідки, аналогічно доведенню теореми 2.1, випливає існування та єдиність розв’язку задачі (2.74) — (2.80).

Висновки до розділу 2

1. На основі виконаної систематизації досліджено типові випадки станів пароріднинних двофазних систем, серед яких, як найбільш поширені на практиці, було виділено:

— динамічний бульбашковий стан утворення та розповсюдження хвиль;

— динамічний бульбашковий стан утворення та розповсюдження хвиль з «комірковою» формою існування бульбашок;

— динамічний стан за наявності у рідинній складовій границі розділу для компонент з різними фізико-хімічними властивостями (зокрема, густинами та реологією).

2. Для виділених типових динамічних станів пароріднинних двофазних систем запропоновано ММ, які, на відміну від існуючих, описують не тільки фазові переходи, а і враховують теплові ефекти при появі парової фази та теплові втрати у зовнішнє середовище. Моделі побудовано на основі строгого врахування законів збереження (маси та енергії) і представлено у вигляді диференційних рівнянь або еволюційних варіаційних нерівностей у частинних похідних, що дозволило адекватно (в смислі якісної картини перебігу фізичних явищ) представити процеси, які досліджуються.

3. Сформульовано і коректно доведено умови існування та єдиності розв’язків диференційних рівнянь та варіаційних нерівностей, які утворюють запропоновані ММ типових випадків динамічних станів пароріднинних двофазних систем (зокрема, у вигляді відповідних теорем).

РОЗДІЛ 3. ДИСКРЕТНІ АНАЛОГИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ

В розділі 2 було запропоновано ММ типових випадків динамічних станів пароріднинних двофазних систем. Ці ММ представлено математичним апаратом в класах диференційних рівнянь у частинних похідних та варіаційних нерівностей у частинних похідних.

З метою подальшої обчислювальної реалізації запропонованих ММ типових випадків динамічних станів пароріднинних двофазних систем розробимо їх дискретні аналоги, використовуючи *економічні* (з точки зору обчислювальних затрат) схеми.

3.1. Узагальнення математичного опису динамічних станів пароріднинних двофазних систем

У випадках рівновагових ММ їх представлено диференційними рівняннями у частинних похідних, а у випадках нерівновагових — варіаційними рівняннями у частинних похідних. Доцільним підходом до складання (та подальшої реалізації) дискретних ММ динамічних станів пароріднинних двофазних систем слід вважати *уніфікацію* та *типізацію* щодо відповідних класів ММ, першим етапом яких є складання узагальнених ММ як для рівновагових, так і для нерівновагових ММ.

3.1.1. Узагальнена ММ рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем та її дискретний аналог

Розробка узагальненої ММ рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем. Аналізуючи ММ розглянутих типових рівновагових динамічних станів паро рідинних двофазних систем визначимо можливості їх узагальненого математичного опису цих процесів, що, у

подальшому, дасть можливість уніфікувати на умовах *типізації* підходи до їх числової та обчислювальної реалізації.

В літературних джерелах, наприклад [130 — 133], відомі поширені випадки складання на основі законів, зокрема: класичної механіки (закони Ньютона), теплопровідності та щільності теплового потоку (закони Фур'є), законів дифузії (закони Фіка) та інших фундаментальних фізичних законів, диференційних рівнянь, які описують певні умови збереження маси та енергії, що пов'язані (рівняння) з дифузією, теплопровідністю, тепломасопереносом, плином рідини, хімічними реакціями та іншими процесами. Причому робилися спроби узагальнення цих диференційних рівнянь у вигляді ММ того або іншого виду з метою розробки, у подальшому, методів, що дозволяють за єдиними числовими алгоритмами, реалізовувати зазначені класи ММ.

Так, наприклад в роботах [130, 131], було запропоновано узагальнення математичного опису процесів тепло- та масопереносу у вигляді диференційного рівняння, що містить частинні похідні параболічного та гіперболічного типів. Але, як було пізніше зазначено в [106], це рівняння було виведено не на основі аналізу і узагальнення дифузійних та тепломасообмінних процесів, які відбуваються в реальних промислових об'єктах, а в результаті аналізу явищ, що відбуваються у деяких елементарних об'ємах *гіпотетичних об'єктів*. Даний факт суттєво звужує прикладний аспект застосування вказаного математичного опису в якості *адекватної ММ* рівновагових динамічних станів пароріднних систем, які розглядаються в чинній роботі, оскільки опис, запропонований в [130, 131], *має лише методологічне значення*.

Таким чином, використовуючи як основу для аналізу ММ розглянутих вище рівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем, можна отримати, в якості їх *узагальненого математичного опису*, наступні рівняння у частинних похідних [13, 17]:

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})}{\partial t} = f\left[\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}, \mathbf{U}_l(t,\mathbf{x})\right] + D(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x}) \qquad (3.1)$$

$$\forall i = 1,...,n;\ \ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Omega;\ \forall t \in (0, t_к),$$

$$\mathbf{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k]^{\mathrm{T}}$$ (т — знак транспонування)

з урахуванням початкових

$$\mathbf{\Phi}(0, \mathbf{x}) = \Phi_i(\mathbf{x}),\ \forall i = 1,...,k;\ \ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Omega \tag{3.2}$$

та граничних умов наступних типів:

— граничних умов першого роду, ГУ-1 (типу Діріхле)

$$\Phi_i(t)\big|_{x_i = 0,\ x_i = x_{i\max}} = \varphi\left[P_i(t, \mathbf{x}), S_{2_i}(t, \mathbf{x})\right],\ \forall i = 1,...,k;\ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Omega \tag{3.3}$$

— граничних умов третього роду, ГУ-3

$$\left.\frac{\partial \Phi_i(t, \mathbf{x})}{\partial r_i}\right|_{x_i = 0,\ x_i = x_{i\max}} = \lambda\left[\Phi_i(t, \mathbf{x}), P_i(t, \mathbf{x}), S_{2_i}(t, \mathbf{x})\right],$$
$$\forall i = 1,...,k;\ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Omega, \tag{3.4}$$

де $\Phi_i(t, \mathbf{x})$ — безперервні функції стану (фізичний смисл яких є тиск в області Ω розповсюдження пароріднинної суміші; парціальний тиск фаз паро рідинної суміші; насиченість в підобластях, які займають фази пароріднинної суміші, тощо), що залежать від часової $t \in (0, t_к)$ та вектора $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Omega$ просторових координат, причому вектор просторових координат $\mathbf{x}$ змінюється у відкритій просторовій області Ω із гладкою границею $\partial\Omega$; функції стану $\Phi_i(t, \mathbf{x})$ визначаються розв'язком системи (3.1) — (3.4), що, як було показано у розділі 2 існує і є єдиним; $\mathbf{U}_l(t, \mathbf{x}), l = 1,...,k^*$ — вектор функцій розподіленого управління, що являють собою збудження (зокрема, поля температури або тиску, які є зовнішнім середовищем по відношенню до пароріднинної системи). Змінні стану $\Phi_i(t, \mathbf{x})$ та управління $U_l(t, \mathbf{x})$ визначено у відкритих гільбертових просторах із границями відповідно $\Omega_{\Phi_i}, \Omega_{U_l}\ \forall i = 1,...,k;\ \forall l = 1,...,k^*$.

Функція $f[\cdot]$ — безперервна лінійна або нелінійна функція; $D(\mathbf{\Phi}, t.\mathbf{x}) = D\{t, \mathbf{x}, \Phi_1(t.\mathbf{x}), \Phi_2(t.\mathbf{x}), ..., \Phi_k(t, .\mathbf{x})\}$ — лінійна або нелінійна функція своїх аргументів, що характеризує дію зовнішніх збуджуючих впливів; $P_i(t.\mathbf{x}), \forall i = 1,...,k;\ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Omega$, $S_{2_i}(t, .\mathbf{x}), \forall i = 1,...,k;\ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Omega$ —

задані функції тиску та паронасиченості (або їх градієнтів) на границі $\partial\Omega$ області Ω, які можуть виступати в якості граничних управляючих впливів; $\lambda_i, \forall i = 1,...,k$ — параметр, який характеризує енергетичні властивості пароріднинної системи (наприклад, коефіцієнт теплопровідності, коефіцієнт теплопередачі, тощо).

Отримані співвідношення (3.1) — (3.4) будемо використовувати в якості узагальненого математичного опису класу *рівновагових* станів пароріднинних двофазних систем при наступному розв'язуванні задач моделювання їх динаміки.

Розробка дискретного аналога узагальненої ММ рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем. Однією з важливих особливостей реалізації ММ динамічних станів пароріднинних двофазних систем є *мінімальні обчислювальні витрати* при машинному моделюванні. Тому, в ході числової реалізації запропонованої вище узагальненої ММ, будемо використовувати *економічні* різницеві схеми.

Одним з поширених методів побудови економічних різницевих схем є метод *сумарної апроксимації* [134, 135]. Детально застосування методу сумарної апроксимації з відповідними дослідженнями точності дискретних ММ було проведено, наприклад в [106], для класу варіаційних нерівностей з параболічними операторами та у подальшому розвинуто на випадок диференційних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) з гіперболічними та гіперболо-параболічними операторами, зокрема, у роботах [136 — 139]. З урахуванням викладеного вище, розробку дискретних економічних ММ для класу рівновагових ММ динамічних станів паро рідинних двофазних систем проведемо у такій послідовності.

Представимо узагальнену ММ (3.1) — (3.4) в наступному вигляді:

$$G(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} A(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x})\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} B(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i} +$$

$$+ C(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x})(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x}) + D(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x})\mathbf{U}(t,\mathbf{x}) + E(\mathbf{\Phi},t,\mathbf{x})\mathbf{F}(t,\mathbf{x}),\ \forall i = \overline{1,n}; \qquad (3.5)$$

$$\mathbf{x} = \{x_n\},\ \mathbf{x} \in \Omega \subset R^3;\ \mathbf{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_k]^{\mathrm{T}};\ t \in (0, t_{\mathrm{к}}),\ Q = \Omega \times (0, t_{\mathrm{к}});$$

$$\mathbf{U}(t,\mathbf{x}) = [U_1, U_2,..., U_{k^*}]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{F}(t,\mathbf{x}) = [F_1, F_2,.., F_{k^{**}}]^{\mathrm{T}},\ k^{**} \le k^*$$

$$\mathbf{\Phi}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in \Omega; \tag{3.6}$$

$$\lambda_i(t,\mathbf{x})\frac{\partial \Phi_i(t,0)}{\partial x_i} + R_k(t)\Phi_i(t,0) = \Xi_i(t),\ \forall i = \overline{1,n}. \tag{3.7}$$

Перетворимо початкову диференційну задачу виду (3.5) — (3.7) в різницеву, використовуючи при цьому багатошарові за часом та простором шаблони [67, 140, 141], зокрема, *шеститочковий шаблон* [67], який дозволяє побудувати схеми *двошарові* за *часом* та *тришарові* за *простором*, що, в свою чергу, дозволить розв'язувати лінійні та нелінійні (із залежністю коефіцієнтів при похідних від шуканих функцій) просторові задачі.

Розглянемо також побудову можливих для даного випадку різницевих схем та виконаємо їх порівняльне дослідження та *стійкість*, *збіжність* та *точність*. Подібне дослідження дозволить виявити практичну придатність та області переважного застосування цих схем.

Введемо наступні сітки та матриці, утворені відповідними сітками:

$$\boldsymbol{\omega}_{\Delta x} = \{x_n = l\,\Delta\mathbf{x},\ l = 0,1,...,L\};\ \omega_{\Delta t} = \{t_m = m\,\Delta t,\ m = 0,1,...,M\};$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\Delta x \Delta t} = \boldsymbol{\omega}_{\Delta x} \times \omega_{\Delta t} = \{(l\,\Delta x, m\,\Delta t),\ l = 0,1,...,L,\ m = 0,1,...,M\},$$

з кроками по просторових координатах $\Delta\mathbf{x} = \{\Delta x_1,...,\Delta x_n\}$; $\Delta x_j = x_{j\max} / L_{x_j}$; $j = \overline{1,n}$ та по часовій координаті $\Delta t = t_k / M$. Для простоти побудови та використання уведених сіток будемо вважати, що останні є рівномірними, тобто для них виконуються умови: $\Delta t = \text{const}$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$.

Позначимо через Φ_l^m значення сіткової функції у вузлі (t_m, x_l), визначеної на $\boldsymbol{\omega}_{\Delta\bar{x}\Delta t}$. Тоді, заміняючи безперервні похідні в рівняннях системи (3.5) на відповідні кінцеві різниці, одержимо:

$$\frac{\Phi_{l_i}^{m+1} - \Phi_{l_i}^m}{\Delta t} = \frac{A_i\{\cdot\}}{\Delta x_j^{\,2}}\left[\kappa\left(\Phi_{(l+1)_i}^{m+1} - 2\,\Phi_{l_i}^{m+1} + \Phi_{(l-1)_i}^{m+1} + (1-\Theta)\left(\Phi_{(l+1)_i}^{m} - 2\,\Phi_{l_i}^{m} + \Phi_{(l-1)_i}^{m}\right)\right)\right] +$$

$$+ \frac{B_i\{\cdot\}}{\Delta z_j}\left[\Phi_{(l-1)_i}^{m+1} - 4\,\Phi_{l_i}^{m+1} + 3\,\Phi_{(l+1)_i}^{m+1} + 3\Phi_{(l+1)_i}^{m} - 4\Phi_{l_i}^{m} + \Phi_{(l-1)_i}^{m}\right] +$$

$$+ C_i\{\cdot\}\Phi_{l_i}^m + D_i\{\cdot\}U_{l_i}^m + E_i\{\cdot\}F_{l_i}^m;\ \ i,j = \overline{1,n}, \tag{3.8}$$

де κ — довільний речовинний параметр $(0 \le \kappa \le 1)$.

Початкові умови при дискретизації набувають вигляду:

$$\Phi_i(0,l) = \Phi_i^0(l),\ i = \overline{1,n}. \tag{3.9}$$

В якості різницевих аналогів граничних умов (3.7) використаємо наступні вирази у випадках:

— плаский потік (канали плину пароріднинної двофазної системи прямокутного перерізу):

$$\lambda_j^m \frac{\Phi_{l_i}^m - \Phi_{(l-1)_i}^m}{\Delta x_j} - R_j^m\, \Phi_{l_i}^m = \Xi_j^m;\ x_j = 0,\ t \ge 0,\ i, j = \overline{1,n}. \tag{3.10}$$

— циліндричний потік (канали плину пароріднинної двофазної системи круглого перерізу):

$$\lambda_j^m \frac{\Phi_{l_i}^m - \Phi_{(l-1)_i}^m}{\Delta r} - R_j^m \Phi_{l_i}^m = \Xi^m;\ r > 0,\ t \ge 0,\ i = \overline{1,n};\ j = 1,2, \tag{3.11}$$

$$\lambda_j^m \frac{\Phi_{l_i}^m - \Phi_{(l-1)_i}^m}{\Delta x_i} - K_j^m\, \Phi_{l_i}^m = \Xi_i^m;\ x_i = 0,\ t \ge 0,\ i = \overline{1,n};\ j = 1,2. \tag{3.12}$$

Схема (3.8) описує однопараметричне (відносно κ) сімейство явно-неявних різницевих схем. Вибір параметра κ, як свідчить з результатів численних робіт, зокрема [142 — 145], визначає стійкість (збіжність розв'язку) та точність схеми (3.8). При цьому *безумовну збіжність* (тобто існування розв'язку дискретної задачі незалежно від вибору кроків дискретизації за часом та просторовими координатами) забезпечує різницева схема з $\kappa = 1$ (чисто неявну схему). У подальшому, з огляду на зазначену властивість, для реалізації різницевої задачі виду (3.8) — (3.10) (або (3.8), (3.9), (3.11), (3.12)) будемо використовувати саме цю схему.

Таким чином, при $\kappa = 1$ та заміні частинної похідної першого порядку (з урахуванням форми плину потоків, які розглядаються) по простору наступними виразами

$$\frac{\partial \Phi_i(r,t,\mathbf{x})}{\partial r} = \frac{\Phi_{(l+1)_i}^{m+1} - \Phi_{(l-1)_k}^{m+1}}{2\Delta r};\ i = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial \Phi_i(t,\bar{x})}{\partial x_j} = \frac{\Phi^{m+1}_{(l+1)_i} - \Phi^{m+1}_{(l-1)_i}}{2\Delta x_j};\ i = \overline{1,n}$$

отримаємо чисто *неявні* схеми:

$$\frac{\Phi^{m+1}_{l_i} - \Phi^{m}_{l_i}}{\Delta t} = A_i\{\cdot\}\frac{\Phi^{m+1}_{(l+1)_i} - 2\Phi^{m+1}_{l_i} + \Phi^{m+1}_{(l-1)_i}}{\Delta x_j^2} + B_i\{\cdot\}\frac{\Phi^{m+1}_{(l+1)_i} - \Phi^{m+1}_{(l-1)_i}}{\Delta x_j} +$$

$$+ C_i\{\cdot\}\Phi^{m}_{l_i} + D_i\{\cdot\}U^{m}_{l_i} + E_i\{\cdot\}F^{m}_{l_i};\ i, j = \overline{1,n}. \qquad (3.13)$$

або

$$\frac{\Phi^{m+1}_{l_i} - \Phi^{m}_{l_i}}{\Delta t} = A_i\{\cdot\}\frac{\Phi^{m+1}_{(l+1)_i} - 2\Phi^{m+1}_{l_i} + \Phi^{m+1}_{(l-1)_i}}{\Delta r^2} + B_i\{\cdot\}\frac{\Phi^{m+1}_{(l+1)_i} - \Phi^{m+1}_{(l-1)_i}}{(\Delta r + \Delta x_i)} +$$

$$+ C_i\{\cdot\}\Phi^{m}_{l_i} + D_i\{\cdot\}U^{m}_{l_i} + E_i\{\cdot\}F^{m}_{li};\ i = \overline{1,n}. \qquad (3.14)$$

для пласких потоків (вираз (3.13)) та циліндричних потоків (вираз (3.14)), відповідно.

Рівняння (3.13) або (3.14) можуть бути використані у відповідних просторових областях $0 < x_j < x_{j_{\max}};\ j = \overline{1,n}$ або $0 < r < r_{\max}$, $0 < x_i < z_{i_{\max}}; i = \overline{1,n}$, за винятком граничних точок: $x_j = 0$, $x_j = x_{j_{\max}};\ j = \overline{1,n}$ або $r = 0$, $r = r_{\max}$ та $x_i = x_{i_{\max}};\ i = \overline{1,n}$. Для зазначених граничних точок сіткова функція визначається із граничних умов (3.10) або (3.11) та (3.12), відповідно.

3.1.2. Узагальнена ММ нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем та її дискретний аналог

Розробка узагальненої ММ нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем. При складанні ММ нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем застосовано апарат варіаційних нерівностей у частинних похідних. Визначимо можливості узагальненого математичного опису даного класу динамічних станів, враховуючи результати робіт [146 — 149]. Також, враховуючи, що роботи [146 — 149] являють собою перший досвід застосування апарату варіаційних нерівностей для

створення ММ двофазних систем (а пізніше цей досвід було розширено у межах монографії [106]), тому, у подальших розмірковуваннях щодо складання узагальненого математичного опису нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних сумішей, приймемо систему позначень та процедуру складання моделі (поширивши її на фізичну картину пароріднинних двофазних систем), введених у вказаних роботах.

Нехай функція $\Phi(t,\mathbf{x})$, визначена на обмеженій відкритій множині Q простору $\Re^n$, $n=1,2$ (тут, і надалі, розглядається плаский випадок), з гладкою границею Г та в інтервалі часу $(0,t_к)$ для $t_к<\infty$ (де $t_к$ — кінцевий час спостереження, а $Q=(0,t_к)\times\Omega,\ \Sigma=(0,t_к)\times\Gamma$) — є розв'язком варіаційної нерівності

$$\Phi(t,\mathbf{x})\in K:\left(\frac{\partial\Phi(t,\mathbf{x})}{\partial t},v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right)+\left(B(\gamma)\Phi(t,\mathbf{x}),\left[v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]\right)+$$

$$+\mathbf{j}\left[v(t,\mathbf{x})\right]-\mathbf{j}\left[\Phi(t,\mathbf{x})\right]\geq\left(f,v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right)\quad\forall v(t,\mathbf{x})\in H^1(\Omega)\qquad(3.15)$$

з початковою та граничною (наприклад, типу Неймана) умовами

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0,\mathbf{x})=\Phi_0(\mathbf{x}),\\ \partial\Phi(t,\mathbf{x})/\partial\eta=\xi(t,\mathbf{x})\end{array}\right\},\qquad(3.16)$$

де $\Phi(t,\mathbf{x})$ — шукана функція, яка являє собою фізичну величину, що визначає простір станів пароріднинної двофазної системи (наприклад, тиск, насиченість тощо); $v(t,\mathbf{x})$ — пробна функція, яка за фізичним смислом співпадає з шуканою функцією $\Phi(t,\mathbf{x})$ та є поточним наближенням до останньої при виконанні оптимізаційного процесу пошуку розв'язку; оператор $B(\gamma)$, який задає лінійне перетворення $B(\gamma):H^1(\Omega)\to H^1(\Omega)$, визначено білінійною формою

$$\left(B(\gamma)\Phi(t,\mathbf{x}),\left[v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]\right)=$$

$$=k(\mathbf{x})\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^n\left\{\beta\cdot\frac{\partial\Phi(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\left[v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]}{\partial x_i}\right\}\right\}dx,\qquad(3.17)$$

$\beta=1$ (якщо немає додаткових умов на перебіг фізичного процесу), $\beta\neq1$ (якщо є додаткові умови на перебіг фізичного процесу, наприклад, наявність капілярного

тиску); $f[\cdot]$ — змушуюча функція процесу, для якої операція $\left(f,\left[v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]\right)$ співпадає із скалярним добутком в $L^2(\Omega)$: $\left(f,\left[v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]\right)=\int\limits_{\Omega}\left[f\left(\mathbf{x}\right),\Phi(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]dx$ чи $\left(f,\left[v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]\right)=$ $=\int\limits_{\Gamma}\left[f\left(\mathbf{x}\right),v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]d\Gamma$; $\mathbf{j}[\cdot]$ — опуклі функціонали, які визначають вид фізичного процесу реології і які можуть бути визначені або на границі Γ просторової області Ω

$$\mathbf{j}[\cdot]=\int\limits_{\Gamma}\left\{\varphi\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}\right]\cdot\lambda\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\Phi_{\text{зов}}(t,\Gamma)\right]\right\}d\Gamma, \tag{3.18}$$

або всередині просторової області Ω

$$\mathbf{j}[\cdot]=\int\limits_{\Omega}\left\{\varphi\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}\right]\cdot\lambda\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\Phi_{\text{зов}}(t,\mathbf{x})\right]\right\}dx, \tag{3.19}$$

де $\varphi[\cdot]$ — певна безперервна функція, в якості аргументу якої, крім просторової координати, може бути шукана функція; $\lambda[\cdot]$ — неперервна, така, що диференціюється (або не має властивість бути диференційованою) функція від шуканої змінної (або змінної тої ж фізичної природи, але заданої поза просторовою областю Ω), а також змінна іншої фізичної природи (прикладами окремих випадків функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$, що характеризуються вказаними властивостями, можуть слугувати співвідношення (2.22) —(2.25) та (2.55), (2.56)); $\xi(t,\mathbf{x})$ — невід'ємна функція на границі Γ просторової області Ω, що визначає напрямок та якісну картину перебігу фізичного процесу в області Ω.

Для визначення допустимих функцій для $\varphi[\cdot]$ та $\lambda[\cdot]$ уявімо, що $\varphi[\cdot],\ \lambda[\cdot]\in L^{\infty}(\overline{Q})$, де $\overline{Q}=(0,t_{\text{к}})\times\overline{\Omega}$. В результаті цього простори відповідних функцій визначаються як $\Delta\in L^{\infty}(\overline{Q}),\ \Lambda\in L^{\infty}(\overline{Q})$, причому, простори Δ и Λ є банаховими відносно норми

$$\left\|\varphi\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}\right]\right\|_{\Delta}=\left\|\varphi\left[\psi(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}\right]\right\|_{L^{\infty}(\overline{Q})}$$

$$\left\|\lambda\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\Phi_{\text{зов}}(t,\Gamma)\right]\right\|_{\Lambda}=\left\|\lambda\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\psi_{\text{зов}}(t,\Gamma)\right]\right\|_{L^{\infty}(\overline{Q})}.$$

При цьому множини допустимих функцій $\Psi_{\text{доп}}$ та $\Lambda_{\text{доп}}$ можуть бути представлені у вигляді

$$\Psi_{\text{доп}} = \left\{ \varphi \in \Delta \Big|_{\varphi(\psi, x) \geq D_1} \right\};$$

$$\Delta_{\text{доп}} = \left\{ \lambda \in \Lambda \Big|_{\varphi\lambda(\psi, \psi_{\text{зов}'}) \geq D_2} \right\},$$

де D_1, D_2 — деякі задані дійсні числа.

В розділі 2 для окремих випадків оператора $B(\gamma)$ та функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$ було доведено теореми існування та єдності розв'язку. Поширимо отримані результати на узагальнений випадок. Будемо вважати, що сукупність операторів $B(\gamma)$, які визначаються співвідношенням (3.17), є множиною коерцитивних відображень (зокрема, коерцитивних білінійних форм), такою, що $\left(B(\gamma)\, \Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(t, \mathbf{x})\right)_{H^1, H} \geq \alpha \left\| \Phi(t, \mathbf{x}) \right\|^2_{H^1} \; \forall \Phi(t, \mathbf{x}) \in H^1 \; \exists \alpha > 0$.

Враховуючи виконане вище узагальнення та результати роботи [133] можна прийти до висновку, що характер розв'язку співвідношень (3.15), (3.16) буде визначатися видом функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$ (зокрема, видом функцій $\varphi[\cdot]$ та $\lambda[\cdot]$. Очевидно також, що функціонали $\mathbf{j}[\cdot]$ зводять (3.15), (3.16) до нелінійних задач з невідомими границями (3.18) або з невідомою областю (3.19). Відзначимо також, що для поставленої задачі складність розв'язування полягає в тому, що просторово-часові області дії відомих (наприклад, граничних) умов невідомі і залежать від стану. Віднаходження цих областей може розглядатися як розв'язок задачі [146].

Розробка дискретного аналога узагальненої ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем. Розглянемо можливість побудови дискретного аналога ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем, які враховували б найважливіші якісні характеристики запропонованих вище неперервних ММ.

Серед особливостей неперервних ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем є їх нелінійність (як структурна, так і параметрична) та нестаціонарність.

Запропонуємо підхід до розробки дискретного аналога узагальненої ММ класу динамічних станів, яка розглядається. При цьому дискретну ММ будемо розробляти на основі методу *кінцевих різниць* [68 — 71], який хороше алгоритмізується, та зручний при наступній числовій реалізації [131 — 133].

З огляду на достатню складність вихідної постановки задачі (зазначені вище особливості неперервних ММ фізичних процесів) очевидно уявити і очікувану складність дискретного аналога, який розробляється. У зв'язку з цим, розробку останніх будемо вести, використовуючи методи побудови економічних (з точки зору обчислювальної реалізації) різницевих схем, зокрема, метод *сумарної апроксимації* [67]. Оскільки безперервні ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем розроблялись на основі законів збереження (зокрема, маси та енергії), будемо вимагати, щоб основні якісні властивості фізичних процесів зберігались. Вказаній вимозі відповідають *консервативні* (*дивергентні*) сітки [67, 150], для яких закони збереження є алгебраїчним наслідком різницевих рівнянь. Для консервативних різницевих рівняння збереження (балансу) записуються для елементарних об'ємів (комірок) сіткової області. Інтеграли та похідні, які входять до цих рівнянь балансу, замінюються наближеними різницевими виразами. Такий метод отримання різницевих схем відомий як *інтегро-інтерполяційний* метод (або метод *балансу*) [67].

Таким чином, дискретний аналог ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем будемо розробляти на основі поєднання методу сумарної апроксимації та інтегро-інтерполяційного методу.

При створенні дискретного аналога класу динамічних станів, які розглядаються, використаємо еквівалентну безперервну ММ виду (3.15), (3.16). Попередньо виконаємо наступні очевидні перетворення. Переформулюємо задачу (3.15), (3.16) до вигляду обмежень у вигляді рівностей та елементарних нерівностей. Для цього уведемо до розгляду додаткову невідому функцію $\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]$, де $\Phi(t,\mathbf{x})$ та $v(t,\mathbf{x})$ визначено раніше, $\theta[\psi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]\in L^{\infty}(\Sigma)$ та

по структурі відповідає алгебраїчній сумі функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$ (співвідношення (3.18) або (3.19)). Такий підхід, у застосуванні щодо реалізації ММ у вигляді варіаційних нерівностей, застосовано, зокрема, в роботі [83]. Тоді простором визначення функції $\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]$ слугує Θ_Σ, який є банаховим простором з нормою

$$\|\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]\|_{\Theta_\Sigma} = \|\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]\|_{L^\infty(\Sigma)}.$$

Визначимо для $\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]$ простір допустимих функцій

$$\Theta_{\Sigma_{don}} = \left\{\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})] \in \Theta_\Sigma \big|_{\theta(\psi,v)\geq D}\right\},$$

де D — певне задане додатне число.

Введемо умову

$$\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})] \geq 0,\ \forall v(t,\mathbf{x}) \in K. \tag{3.20}$$

З урахуванням виконаних перетворень, співвідношення (3.15), (3.16) представимо у вигляді рівностей та елементарної нерівності

$$\Phi(t,\mathbf{x}) \in K:$$

$$\left(\frac{\partial\Phi(t,\mathbf{x})}{\partial t}, v(t,\mathbf{x}) - \Phi(t,\mathbf{x})\right) + \left(B(\gamma)\ \Phi(t,\mathbf{x}), [v(t,\mathbf{x}) - \Phi(t,\mathbf{x})]\right) + \mathbf{j}[v(t,\mathbf{x})] - \mathbf{j}[\Phi(t,\mathbf{x})] -$$

$$- \{\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]\} = \left(f, [v(t,\mathbf{x}) - \Phi(t,\mathbf{x})]\right);$$

$$\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})] \geq 0,\ \forall v(t,\mathbf{x}) \in K, \tag{3.21}$$

$$\Phi(0,\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}). \tag{3.22}$$

При побудові дискретного аналога узагальненої ММ для випадку, який розглядається, використаємо еквівалентну безперервну модель виду (2.71) з початковими умовами (2.72). Граничними умовами виступають ГУ, наприклад, типу Неймана (другий вираз у (3.16)). Іншими словами, в якості неперервної ММ для даного випадку виступає наступна система:

$$\Phi(t,\mathbf{x}) \in K:$$

$$\left(\frac{\partial\Phi(t,\mathbf{x})}{\partial t}, v(t,\mathbf{x}) - \Phi(t,\mathbf{x})\right) + \left(B(\gamma)\ \Phi(t,\mathbf{x}), [v(t,\mathbf{x}) - \Phi(t,\mathbf{x})]\right) + \mathbf{j}[v(t,\mathbf{x})] - \mathbf{j}[\Phi(t,\mathbf{x})] -$$

$$- \{\theta[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})]\} = \left(f, [v(t,\mathbf{x}) - \Phi(t,\mathbf{x})]\right);$$

$$\theta\left[\Phi(t,\mathbf{x}),v(t,\mathbf{x})\right]\geq 0,\ \forall v(t,\mathbf{x})\in K\,, \tag{3.23}$$

$$\Phi(0,\mathbf{x})=\Phi_0(\mathbf{x}), \tag{3.24}$$

$$\Phi(t,\mathbf{x})/\partial\eta=\varphi(t,\mathbf{x}), \tag{3.25}$$

Перетворимо вихідну диференційну задачу (3.23) — (3.25) в систему різницевих рівнянь. При цьому використання методу сумарної апроксимації дозволяє розбити загальну задачу на ряд етапів, на кожному з яких розв'язується i одновимірних диференційних задач за допомогою інтегро-інтерполяційного методу (де i розмірність вектору просторових координат $i=\overline{1,n}$). Загальний же розв'язок віднаходиться на основі окремих етапів. Очевидно, що такий підхід дозволяє, з одного боку — роздрібнити складну, в математичній постановці, задачу на ряд простих, а з іншого боку — забезпечити порівняно невисокі запити машинних ресурсів на реалізацію в ході числового розв'язання [83, 106].

Введемо на відрізку $0\leq t\leq t_к$ рівномірні сітки:

$$\omega_{\Delta t}=\left\{t_m=m\,\Delta t;\ m=\overline{0,M};\ \Delta t=t_{\text{к}}/\text{M}\right\}.$$

Розіб'ємо інтервал Δt на $j=2$ частин (оскільки розв'язуються пласкі задачі), уводячи проміжну точку

$$t_{m+1/2}=t_m+\Delta t/2\,. \tag{3.26}$$

Систему i-мірних рівнянь (3.23) з початковими (3.24) та граничними (3.25) умовами замінимо системою одновимірних рівнянь

$$\frac{m_{(1)}}{2}\cdot\frac{\partial\Phi\left(t,x_{(1)}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\left[v\left(t,x_{(1)}\right)-\Phi\left(t,x_{(1)}\right)\right]}{\partial x_{(1)}}=-\frac{1}{2}B_{(1)}(\gamma)\cdot\frac{\partial\left[v^i\left(t,x_{(1)}\right)-\Phi^i\left(t,x_{(1)}\right)\right]}{\partial x_{(1)}}-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{(1)}\phi_{(1)}\left[v\left(t,x_{(1)}\right)\right]+\frac{1}{2}\alpha_{(1)}\phi_{(1)}\left[\Phi\left(t,x_{(1)}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\beta_{(1)}\theta_{(1)}\left[v\left(t,x_{(1)}\right)-\Phi\left(t,x_{(1)}\right)\right]+\frac{1}{2}f_{(1)}\left[v\left(t,x_{(1)}\right)-\Phi\left(t,x_{(1)}\right)\right],$$

$$\Phi\left(0,x_{(1)}\right)=\Phi_0\left(x_{(1)}\right);\quad\left(t_{m-1}<t\leq t_m;\ x_{(1)}=0\right). \tag{3.27}$$

$$\frac{m_{(2)}}{2}\cdot\frac{\partial\Phi\left(t,x_{(2)}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\left[v\left(t,x_{(2)}\right)-\Phi\left(t,x_{(2)}\right)\right]}{\partial x_{(2)}}=-\frac{1}{2}B_{(2)}(\gamma)\cdot\frac{\partial\left[v^{i}\left(t,x_{(2)}\right)-\Phi^{i}\left(t,x_{(2)}\right)\right]}{\partial x_{(2)}}-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{(2)}\phi_{(2)}\left[v\left(t,x_{(2)}\right)\right]+\frac{1}{2}\alpha_{(2)}\phi_{(2)}\left[\Phi\left(t,x_{(2)}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\beta_{(2)}\theta_{(2)}\left[v\left(t,x_{(2)}\right)-\Phi\left(t,x_{(2)}\right)\right]+\frac{1}{2}f_{(2)}\left[v\left(t,x_{(2)}\right)-\Phi\left(t,x_{(2)}\right)\right],$$

$$\partial\Phi\left(t,x_{(2)}\right)/\partial\eta=\varphi\left(t,x_{(2)}\right),$$

$$\Phi\left(t_{m+1/2},x_{(1)_{\max}}\right)=\Phi\left(t_{m+1/2},0\right);\quad\left(t_{m+1/2}<t\le t_{m+1};\quad x_{(2)}=0\right),\qquad(3.28)$$

де функції $\phi_{(j)}[\cdot],\ j=1,2$ є безперервними функціями в області Ω та на її границі Γ, і визначаються відповідно як:

$$\phi_{(j)}[\cdot]\equiv\mathbf{j}[\cdot]=\int_{\Omega}\left\{\varphi\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}\right]\cdot\lambda\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\Phi_{\text{зов}}(t,\mathbf{x})\right]\right\}dx$$

або

$$\phi_{(j)}[\cdot]\equiv\mathbf{j}[\cdot]=\int_{\Gamma}\left\{\varphi\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}\right]\cdot\lambda\left[\Phi(t,\mathbf{x}),\psi_{\text{зов}}(t,\Gamma)\right]\right\}d\Gamma.$$

Індекс в круглих скобках показує, для якої просторової координати записано відповідні рівняння.

Системи дискретних рівнянь (3.27), (3.28) розв’язуються за допомогою інтегро-інтерполяційного методу, який приводить до консервативних сіткових аналогів для комірок (та підобластей: при розривних функціях) просторової області Ω.

3.2. Методи реалізації ММ динамічних станів пароріднинних двофазних систем

Відповідні ММ динамічних станів пароріднинних двофазних систем утворюють диференційні рівняння у частинних похідних (ДРЧП) — у випадку рівновагових моделей, та варіаційні нерівності у частинних похідних — у випадку нерівновагових моделей. Враховуючи особливості кожного із зазначених класів математичних виразів, розробимо методи їх реалізації, ґрунтуючись на виконаних узагальненнях математичних описів.

При цьому слід зазначити, що виконані узагальнення математичних описів динамічних станів пароріднинних двофазних систем (відповідно для рівновавгових та нерівновагових динамічних станів) дають змогу здійснювати їх моделювання на основі принципу *типізації* — тобто з використанням єдиних процедур. Такий підхід дозволяє *уніфікувати* як математичний апарат (методологічну складову процесу моделювання), так і програмні модулі (інструментальну складову процесу моделювання) в ході машинної реалізації розроблених відповідних ММ.

3.2.1. Метод реалізації ММ рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем

Розробимо числовий метод реалізації дискретних ММ рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем, ґрунтуючись на узагальненій ММ для даного випадку та дискретному аналізі останньої.

Звернемося до різницевих схем (3.13), (3.14). Доповнимо ці різницеві схеми дискретними аналогами початкових та граничних умов (3.9) — (3.12).

Використовуючи матричну форму запису, представимо рівняння схем (3.13) та (3.14) у наступному (матричному) вигляді, відповідно:

$$\left[\Phi_i^{m+1} - \Phi_i^m\right] = \Delta t \left\{ \left[\mathbf{A}_i + \frac{\mathbf{B}_i}{2\left(\Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n\right)} \right] \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x_i} \right\}^{m+1} +$$

$$+\Delta t\left\{\left[\mathbf{A}_i+\frac{\mathbf{B}_i}{2\left(\Delta x_1+\ldots+\Delta x_n\right)}+\mathbf{C}_i\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x_i}\right\}^m=\left[\mathbf{D}_i U_i^m+\mathbf{E}_i F_i^m\right] \qquad (3.29)$$

та

$$\left[\Phi_i^{m+1}-\Phi_i^m\right]=\Delta t\left\{\left[\mathbf{A}_i+\frac{\mathbf{B}_i}{2\left(\Delta r+\Delta x_1+\ldots+\Delta x_{n-1}\right)}\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x_i}\right\}^{m+1}+$$

$$+\Delta t\left\{\left[\mathbf{A}_i+\frac{\mathbf{B}_i}{2\left(\Delta r+\Delta x_1+\ldots+\Delta x_{n-1}\right)}+\mathbf{C}_i\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x_i}\right\}^m=\left[\mathbf{D}_i U_i^m+\mathbf{E}_i F_i^m\right] \quad (3.30)$$

де тлумачення індексів при змінних та матрицях надано вище.

Для числової реалізації матричних рівнянь (3.29) або (3.30) з початковими та граничними умовами (3.9) — (3.12) скористаємося ітераційною процедурою Зейделя [151 — 153], яка забезпечує найшвидшу збіжність ітераційного процесу при пошуку наближеного розв'язку [154], та не накладає умов на власні числа матриць правої частини матричних рівнянь (у випадку, що розглядається, вирази (3.29) або (3.30)) на відміну, наприклад, від процедури простої ітерації [154], а також не потребує віднаходження похідних від елементів цих матриць як в процедурі методу Ньютона [152, 155, 156].

Тоді можна стверджувати, що у досить малому околі шуканої функції Φ_i^* (береться до уваги те, що розглядається узагальнена ММ) розв'язок матричних рівнянь (3.29) або (3.30) з початковими (3.9) та граничними (3.10) — (3.12) умовами для наближень за процесом Зейделя має наступний вигляд:

$$\left\|\Phi_i^{v+1}-\Phi_i^*\right\|\le q\left\|\Phi_i^v-\Phi_{li}^*\right\|, \qquad (3.31)$$

де v — номер ітерації; q — параметр методу, $0\le q\le 1$ (умову збіжності для виразу (3.31) визначено у додатку Б).

Вважаючи, що фізико-хімічні параметри паро рідинної суміші однакові у всій області моделювання (дискретизації) Ω, тобто елементи відповідних матриць коефіцієнтів $\mathbf{A}_i\{\cdot\}$ — $\mathbf{E}_i\{\cdot\}$ мають однаковий характер, можна визначити умову (критерій) завершення ітераційного процесу (3.31):

$$\max_{L_r, L_{\mathbf{x}}} \left| \frac{\Phi_i^{\nu+1} - \Phi_i^{\nu}}{\Phi_i^{\nu+1}} \right| \le \delta_i, \qquad (3.32)$$

де δ_i — задана точність розв'язку.

Таким чином, у підсумку, розроблено метод реалізації узагальненої ММ рівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем, який зводиться до дискретизації неперервної узагальненої ММ за явно-неявною схемою (для параметру $0 \le \kappa \le 1$) та подальшого розв'язування отриманої системи дискретних рівнянь за ітераційним процесом Зейделя.

Алгоритм розв'язування задачі моделювання (прогнозування) рівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем, може бути сформульовано наступним чином:

1. Для часового кроку $m = 1$.

1.1. Завдання вихідних значень: $\Phi^0_{(r,x_k)_i}$, $\mathbf{A}\left\{\Phi^0_{(r,x_k)_i}\right\}$ — $\mathbf{E}\left\{\Phi^0_{(r,x_k)_i}\right\}$, $\mathbf{U}^0_{(r,x_k)_i}$, $\mathbf{F}^0_{(r,x_k)_i}$, Δt, Δr, Δx_k; $r = \overline{1, L_r}$, $x_k = \overline{1, L_{x_k}}$, $\forall i = \overline{1, n}$.

1.2. Розв'язування рівнянь динаміки (3.8) з початковими (3.9) та граничними (3.10) — (3.12) умовами — визначення полів шуканих функцій стану $\Phi^1_{(r,x)_i}$ (перша ітерація).

1.3. Організація ітераційного процесу (3.31) до досягнення заданої точності δ_i (у відповідності до критерію (3.32)).

1.4. Формування та виведення підсумкових полів шуканих функцій стану $\Phi^1_{(r,x_k)_i}$.

1.5. Якщо задача ставиться як стаціонарна ($m = 1$), то здійснюється перехід до п.4. Якщо задача — нестаціонарна ($m > 1$), то здійснюється перехід до п.2.

2. Для часового кроку $m \ne 1$.

2.1. Обчислення нових значень: $\mathbf{A}\left\{\Phi^1_{(r,x_k)_i}\right\}$ — $\mathbf{E}\left\{\Phi^1_{(r,x_k)_i}\right\}$, $\mathbf{U}^1_{(r,x_k)_i}$, $\mathbf{F}^1_{(r,x_k)_i}$, Δt, Δr, Δx_k; $r = \overline{1, L_r}$, $x_k = \overline{1, L_{x_k}}$, $\forall i = \overline{1, n}$.

2.2. Розв'язування рівнянь динаміки (3.8) з граничними (3.10) — (3.12) умовами — визначення полів шуканих функцій стану $\Phi^{m+1}_{(r,x_k)_i}$ (перша ітерація).

2.3. Організація ітераційного процесу (3.31) до досягнення заданої точності δ_i (у відповідності до критерію (3.32)).

2.4. Формування та виведення підсумкових полів шуканих функцій стану $\mathbf{\Phi}^{m+1}_{(r,x_k)_i}$.

2.5. Перехід до п.3.

3. Перевірка умови $m = M$. Якщо $m < M$, обчислюється $m = m + 1$ і здійснюється перехід до п.2. Якщо $m = M$, то здійснюється перехід до п4.

4. Закінчення розв'язку.

У подальшому виконано апробацію запропонованого методу та реалізуючого його алгоритму при розв'язуванні прикладних задач, чим підтверджено їх конструктивність.

3.2.2. Метод реалізації ММ нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем

У випадку представлення ММ пароріднних двофазних систем у вигляді варіаційних нерівностей характер перебігу фізичних процесів визначається видом функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$ (вирази (3.18), (3.19)). З особливостей цих функціоналів, характерних для опису, зокрема, процесів реології, та важливих як для розробки методу розв'язання математичних виразів, що складають ММ класу динамічних станів, які розглядаються, так і для їх обчислювальної реалізації, виділимо наступне:

— підінтегральний вирази цих інтегралів є мультиплікативними і може складати з добутків щонайменше двох функцій $\varphi[\Phi(t,\mathbf{x})]$, $\lambda[\Phi(t,\mathbf{x}),\Phi_{зов}(t,\Gamma)]$;

— вказані функції в якості аргументу містять шукану змінну, причому ці функції можуть бути такими, що диференціюються, так і не володіти властивістю бути диференційованими;

— структура функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$ може визначати задачу як нелінійну.

Таким чином, при розробці підходу щодо розв'язування варіаційних нерівностей, які складають ММ досліджуваних динамічних станів, мають бути враховані особливості структури функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$.

Нехай нерівновагові динамічні стани пароріднних двофазних систем описуються в рамках узагальненої ММ виду (3.15), (3.16). Будемо вважати, що змушуючу силу $f \in F_{\text{доп}}$ та початкові умови $\Phi(0,\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x})$ визначено повністю. Вважається, що відомим є оператор $B(\gamma)$ та відомою є структура підінтегральних виразів, які визначають вид функціоналів $\mathbf{j}[\cdot]$ для конкретного класу динамічних станів. Необхідно визначити функцію стану $\Phi(t,\mathbf{x})$, що задовольняє системі (3.15), (3.16) і деякому критерію якості, який буде обґрунтовано нижче.

Повернемося до варіаційної задачі виду (3.23) — (3.25), яка є еквівалентною до вихідної, а обмеження в ній представлено у вигляді рівностей та елементарної нерівності. Тоді, для віднаходження шуканої функції стану $\Phi(t,\mathbf{x})$ скористаємося оптимізаційною процедурою *принципу максимуму* [86 — 90], для якої оберемо наступний критерій якості (тут і далі розглядається випадок задачі, що розглядається на границі Γ області Ω, що, наразі, не звужує її загального характеру):

$$J = \min_{v} \int_{\Gamma} \int_{0}^{T} \left[v(t,\mathbf{x}) - \Phi(t,\mathbf{x}) \right]^2 dt d\Gamma . \qquad (3.33)$$

Фізичний смисл наведеного критерію випливає з наступного. Пробна функція $v(t,\mathbf{x})$ є певним наближенням шуканої функції $\Phi(t,\mathbf{x})$, відбиваючи лише суть фізики конкретного процесу. Тому адекватність перебігу фізичних процесів, зумовлених дією функцій $v(t,\mathbf{x})$ та $\Phi(t,\mathbf{x})$, забезпечується з точністю до різниці між вказаними функціями. При цьому інтегральну різницю між пробною $v(t,\mathbf{x})$ та шуканою $\Phi(t,\mathbf{x})$ функціями можна розглядати як кількісну міру — «штраф» за відхилення перебігу процесу від його реального значення, що відбиває критерій (3.33). Для забезпечення властивості диференціювання підінтегрального виразу в

(3.33) та незалежності J від знаку різниці функцій $v(t,\mathbf{x})$ та $\Phi(t,\mathbf{x})$ підінтегральний вираз в (2.33) підводиться у квадрат.

Отримаємо необхідні умови оптимальності задачі (3.33). Дотримуючись принципу максимуму [86 — 90], введемо нову координату $\sigma(t,\mathbf{x})$ у відповідності до виразу

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\sigma(t,\mathbf{x})}{\partial t\,\partial x_i}=\left[v(t,\mathbf{x})-\Phi(t,\mathbf{x})\right]^2\Big|_{\mathbf{x}\in\Gamma}. \qquad (3.34)$$

Таким чином буде розглядатися в $(n+1)$-мірному просторі з рівнянням динаміки

$$\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\in K:$$

$$\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})}{\partial t},\left[\widetilde{v}(t,\mathbf{x})-\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right]\right)+\left(B(\gamma),\left[\widetilde{v}(t,\mathbf{x})-\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right]\right)+\phi\left[\widetilde{v}(t,\mathbf{x})\right]-\phi\left[\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right]-$$

$$-\left(\theta\left[\widetilde{v}(t,\mathbf{x}),\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right],\left[\widetilde{v}(t,\mathbf{x})-\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right]\right)=\left(f,\left[\widetilde{v}(t,\mathbf{x})-\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right]\right),\quad \widetilde{v}(t,\mathbf{x})\in K, \qquad (3.35)$$

де

$$\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})=\{\sigma(t,\mathbf{x}),\Phi_1(t,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_n(t,\mathbf{x})\},\quad \widetilde{v}(t,\mathbf{x})=\{\sigma(t,\mathbf{x}),v_1(t,\mathbf{x}),\ldots,v_n(t,\mathbf{x})\}$$

при початкових умовах

$$\widetilde{\Phi}(0,\mathbf{x})=\left[0,\Phi_0(\mathbf{x})\right].$$

Будемо вважати, що віднайдено $\Phi(t,\mathbf{x})$. Цій умові відповідає співвідношення

$$\min\int_{\Gamma}\int_{0}^{T}\left[\widetilde{v}(t,\mathbf{x})-\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right]^2 dt\,d\Gamma\to J_{\min}=J^*.$$

В момент часу $t=\tau\ (0<\tau<T)$ уведемо голчасту варіацію тривалістю ε (рис. 3.1). В результаті виконаної варіації зміниться значення функціоналу J

$$\overset{)}{J}=\int_{0}^{T}\left[(t,\mathbf{x})-\widetilde{\Phi}(t,\mathbf{x})\right]^2 dt>J_{\min}.$$

Запишемо аналітично результат варіації (у подальшому, крім окремо обумовлених випадків, для простоти запису, опустимо функціональну залежність шуканої $\Phi(t,\mathbf{x})$ та пробної $v(t,\mathbf{x})$ функцій від незалежних часового та просторового аргументів)

$$\delta\tilde{v} = \tilde{v} - \tilde{\Phi} = \varepsilon\left\{\left[\left(B(\gamma)\tilde{\Phi},\tilde{v} - \tilde{\Phi}\right) + \phi(\tilde{v}) - \phi(\tilde{\Phi}) - \left(\theta(\tilde{\Phi},\tilde{v}),\tilde{v} - \tilde{\Phi}\right) - \left(f,\left(\tilde{v} - \tilde{\Phi}\right)\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \left(B(\gamma)\tilde{\Phi},\tilde{\Phi}\right) + \phi(\tilde{\Phi}) - \left(\theta(\tilde{\Phi}),\tilde{\Phi}\right) - \left(f,\tilde{\Phi}\right)\right\}_{t=\tau}. \qquad (3.36)$$

Виразимо $\tilde{v}$ через варіацію та оптимальну функцію стану

$$\tilde{v} = \tilde{\psi} + \delta\tilde{v}\,. \qquad (3.37)$$

Підставляючи (3.37) в (3.35) отримаємо

$$\tilde{\Phi} \in K : \left(\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t},\left(\tilde{\Phi} + \delta\tilde{v}\right) - \tilde{\Phi}\right) = \left(B(\gamma)\tilde{\Phi},\left(\tilde{\Phi} + \delta\tilde{v}\right) - \tilde{\Phi}\right) + \phi\left(\tilde{\Phi} + \delta\tilde{v}\right) - \phi(\tilde{\Phi}) -$$
$$- \left(\theta\left(\tilde{\Phi},\left(\tilde{\Phi} + \delta\tilde{v}\right)\right),\left(\tilde{\Phi} + \delta\tilde{v}\right) - \tilde{\Phi}\right) - \left(f,\left(\tilde{\Phi} + \delta\tilde{v}\right) - \tilde{\Phi}\right)\ \forall\tilde{v} \in K\,. \qquad (3.38)$$

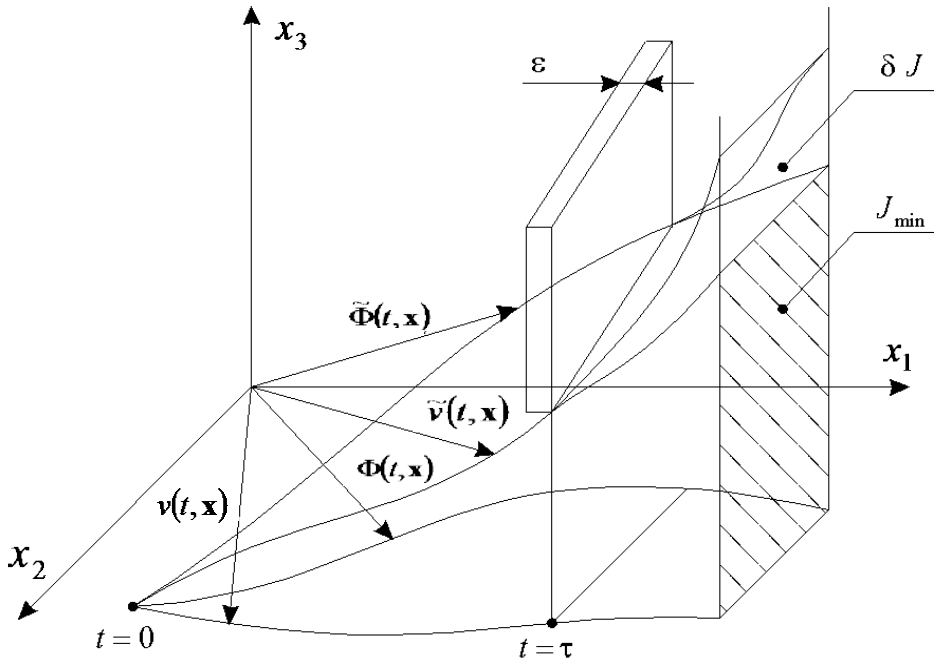


Рис. 3.1. — Графічна інтерпретація введення голчастої варіації тривалістю ε

Для подальших перетворень використаємо покоординатний аналог (3.38)

$$\tilde{\Phi}_i \in K :$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}_i}{\partial t},\left(\tilde{\Phi}_i + \delta\tilde{v}_i\right) - \tilde{\Phi}_i\right) = \left(B(\gamma)\tilde{\Phi}_i,\left(\tilde{\Phi}_i + \delta\tilde{v}_i\right) - \tilde{\Phi}_i\right) + \phi\left(\tilde{\Phi}_i + \delta\tilde{v}_i\right) - \phi(\tilde{\Phi}_i) -$$
$$- \left(\theta\left(\tilde{\Phi}_i,\left(\tilde{\Phi}_i + \delta\tilde{v}_i\right)\right),\left(\tilde{\Phi}_i + \delta\tilde{v}_i\right) - \tilde{\Phi}_i\right) - \left(f,\left(\tilde{\Phi}_i + \delta\tilde{v}_i\right) - \tilde{\Phi}_i\right)\ \forall\tilde{v}_i \in K\,,$$
$$i = 0,1,2,...,n\,. \qquad (3.39)$$

Розкладемо нелінійні функції в (3.39) в ряд Тейлора та обмежимося розглядом величин 1 порядку малості

$$\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}_i}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial t}\right)=\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}_i,\tilde{\Phi}_i\right)+\phi(\tilde{\Phi}_i)-\left(f,\tilde{\Phi}_i\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}_i,\tilde{\Phi}_i\right)+\phi(\tilde{\Phi}_i)-\left(f,\tilde{\Phi}_i\right)\right]}{\partial\tilde{v}_i}\delta\tilde{v}_i,\quad i=0,1,2,...,n. \qquad (32.40)$$

З (3.40) можна отримати, що

$$\frac{\partial\delta\tilde{v}_i}{\partial t}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}_i,\tilde{\Phi}_i\right)+\phi(\tilde{\Phi}_i)-\left(f,\tilde{\Phi}_i\right)\right]}{\partial\tilde{v}_i}\delta\tilde{v}_i,\quad i=0,1,2,...,n. \qquad (3.41)$$

Звернемося тепер до моменту часу $t=T$. Визначимо варіацію функціоналу J в момент часу $t=T$

$$\delta J_{t=T}=\overset{\prime}{J}-J_{\min}>0 \quad \text{або} \quad -\delta J_{t=T}=-\delta\sigma_{t=T}\le 0.$$

Уведемо до розгляду змінну $\tilde{p}(t,\bar{x})$ таким чином, щоб при $t=T$ виконувалася умова

$$-\delta J_{t=T}=-\delta\sigma(T)=\left\langle\delta\tilde{v},\tilde{p}\right\rangle_{t=T}. \qquad (3.42)$$

Покоординатний аналог (3.42) виглядає наступним чином

$$-\delta J_{t=T}=-\delta\sigma(T)=\left\langle\delta\tilde{v},\tilde{p}\right\rangle_{t=T}.$$

Оскільки $\delta\sigma(T)>0$, то для того, щоб виконувався останній вираз, повинно мати місце $p^0(T,x_i)=-1; p_j(T,\mathbf{x})=0,$ де $i=0,1,2,...,n;\ j=1,2,...,n$. Отримуємо, що, якщо оптимальний розв'язок не віднайдено, то $-\delta J<0$, а у випадку оптимального розв'язку маємо $-\delta J=0$, тобто для оптимального розв'язку варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю.

Зв'яжемо змінну $\tilde{p}(t,\mathbf{x})$ з рівнянням динаміки досліджуваного процесу через пробну функцію $v(t,\mathbf{x})$. Віднайдемо таку змінну $\tilde{p}(t,\mathbf{x})$, яка відповідає умові

$$\left\langle\delta\tilde{v}(t,\mathbf{x}),\tilde{p}(t,\mathbf{x})\right\rangle=\left\langle\delta\tilde{v}(T,\mathbf{x}),\tilde{p}(T,\mathbf{x})\right\rangle_{\tau+\varepsilon\le T}=C=\text{const}.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \delta\tilde{v}(t,\mathbf{x}),\, \tilde{p}(t,\mathbf{x})\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \delta\tilde{v}(t,\mathbf{x})}{\partial t}, \tilde{p}(t,\mathbf{x})\right\rangle + \left\langle \frac{\partial v\tilde{p}(t,\mathbf{x})}{\partial t}, \delta\tilde{v}(t,\mathbf{x})\right\rangle_{\tau+\varepsilon\le T} = 0. \qquad (3.43)$$

Покоординатний аналог (3.43) має вид

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \delta\tilde{v}_i(t,\mathbf{x})}{\partial t}\,\tilde{p}_i(t,\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^{n} \delta\tilde{v}_i(t,\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{p}_i \tilde{v}_i(t,\mathbf{x})}{\partial t} = 0, \quad i = 0,1,2,...,n. \qquad (3.44)$$

Підставимо в (3.44) значення похідної $\dfrac{\partial \delta\tilde{v}_i(t,\mathbf{x})}{\partial t}$ з (3.41)

$$\sum_{i=0}^{n} \tilde{p}_i \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}_i, \tilde{\Phi}_i\right) + \phi(\tilde{\Phi}_i) - \left(f, \tilde{\Phi}_i\right)\right]}{\partial \tilde{v}_i} \delta\tilde{v}_i + \sum_{i=0}^{n} \delta\tilde{v}_i \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial t} = 0,$$

$$i = 0,1,2,...,n. \qquad (3.45)$$

Змінимо порядок інтегрування в (3.45)

$$\sum_{i=0}^{n} \delta\tilde{v}_i + \left[\sum_{i=0}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}_i, \tilde{\Phi}_i\right) + \phi(\tilde{\Phi}_i) - \left(f, \tilde{\Phi}_i\right)\right]}{\partial \tilde{v}_i} + \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial t}\right] = 0; \;\; i = 0,1,2,...,n.$$

Тоді

$$\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial t} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}_i, \tilde{\Phi}_i\right) + \phi(\tilde{\Phi}_i) - \left(f, \tilde{\Phi}_i\right)\right]}{\partial \tilde{v}_i} \tilde{p}_i, \quad i = 0,1,2,...,n.$$

Зауважимо, що останнє рівняння є зведеним до (2.73), а змінна $\tilde{p}(t,\mathbf{x})$ виражена через функції стану.

Знову звернемося до варіації функціоналу з урахування $t = T$

$$-\delta J_{t=T} = \left\langle \tilde{v}(t,\mathbf{x}), \tilde{p}(t,\mathbf{x})\right\rangle_{t=T} = 0.$$

Змінимо варіацію $\delta\tilde{v}$ виразом (2.77), скоротимо на ε і, оскільки τ може бути будь-яким, отримаємо

$$\left\langle \left(\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}, \tilde{v} - \tilde{\Phi}\right) + \phi(\tilde{v}) - \phi(\tilde{\Phi}) - \left(\theta(\tilde{\Phi}, \tilde{v}), \tilde{v} - \tilde{\Phi}\right) - \left(f, \left(\tilde{v} - \tilde{\Phi}\right)\right)\right), \tilde{p}\right\rangle_{t=\tau} -$$

$$-\left\langle \left(\left(B(\gamma)\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right) + \phi(\tilde{\Phi}) - \left(f, \tilde{\Phi}\right)\right), \tilde{p}\right\rangle_{t=T} = 0. \qquad (3.46)$$

З (3.46) випливає, що другий доданок в ньому відповідає оптимальному розв'язку варіаційної рівності (3.15). У випадку, коли оптимальний розв'язок $\Phi(t,\mathbf{x})$ віднайдено, варіація функціоналу J буде дорівнювати нулю, тобто $\delta J = 0$. Враховуючи це, перший доданок в (3.46), який визначається функцією Гамільтона

$$\widetilde{H} = \left\langle \left(\left(B(\gamma)\widetilde{\Phi}, \widetilde{v} - \widetilde{\Phi} \right) + \phi(\widetilde{v}) - \phi(\widetilde{\Phi}) - \left(\theta(\widetilde{\Phi}, \widetilde{v}), \widetilde{v} - \widetilde{\Phi} \right) - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \left(f, \left(\widetilde{v} - \widetilde{\Phi} \right) \right) \right), \widetilde{p} \right\rangle, \qquad (3.47)$$

має приймати максимальне значення.

Покажемо можливість визначення максимального значення функції Гамільтона. Покоординатний аналог (3.47) визначається виразом

$$\widetilde{H} = \left\langle \left(\left(B(\gamma)\widetilde{\Phi}_i, \widetilde{v}_i - \widetilde{\Phi}_i \right) + \phi(\widetilde{v}_i) - \phi(\widetilde{\Phi}_i) - \left(\theta(\widetilde{\Phi}_i, \widetilde{v}_i), \widetilde{v}_i - \widetilde{\Phi}_i \right) - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \left(f, \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\Phi}_i \right) \right) \right), \widetilde{p}_i \right\rangle \qquad (3.48)$$

Для забезпечення максимального значення функції $\widetilde{H}$ необхідно прирівняти нулю все частинні похідні цієї функції по пробній змінній $v(t, z)$, що, з урахуванням (3.48), дає систему рівнянь

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v_i} = 0, \quad i = 0,1,2,...,n. \qquad (3.49)$$

Покоординатний аналог (3.48) містить $(n+1)$ функцій v_i, $(n+1)$ функцій θ_i и $(n+1)$ функцій p_i. Оскільки рівнянь (2.49) $(n+1)$, а невідомих — $(3n+3)$, то систему (3.49) не може бути розв'язано однозначно. Для розв'язування (3.49) визначимо частинні похідні

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta_i} = \widetilde{p}_i, \quad i = 0,1,2,...,n. \qquad (3.50)$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_i} = \left[\frac{\partial \widetilde{\Phi}_i}{\partial t}, \widetilde{v}_i - \widetilde{\Phi}_i \right], \quad i = 0,1,2,...,n. \qquad (3.51)$$

При цьому в системі (3.49) — (3.51) число рівнянь співпадає з числом невідомих..

Тоді схему алгоритму розв'язку варіаційної нерівності (3.15) з використанням принципу максимуму може бути представлено наступним чином:

1. Записується рівняння динаміки (3.35) з урахуванням додаткової координати σ.

2. Складається допоміжна функція $\widetilde{H}$ (функція Гамільтона) у відповідності до виразу (3.48).

3. Визначається пробна функція $v^*(t,\mathbf{x})$, яка забезпечує максимум функції $\tilde{H}$ у відповідності до виразу (3.49). Для «довизначення» незалежних змінних θ та p система (3.49) доповнюється рівняннями виду(3.50), (3.51).

4. Шукана змінна $\Phi(t,\mathbf{x})$ буде дорівнювати пробній змінній $v^*(t,\mathbf{x})$, яка забезпечує максимальне значення функції $\tilde{H}$.

Таким чином, запропоновано метод та реалізуючий його алгоритм розв'язування варіаційних нерівностей, які являють собою нерівновагові ММ динамічних станів пароріднних двофазних систем. Даний метод засновано на використанні оптимізаційної процедури *принципу максимуму функції Гамільтона (МФГ)*.

3.3. Числові дослідження динамічних станів пароріднних двофазних систем на основі використання дискретних аналогів узагальнених математичних моделей

Конструктивну спроможність розв'язування прикладних задач дослідження динамічних станів пароріднних двофазних систем розглянемо на тестових прикладах з методологічною підтримкою обчислювальних процедур із застосуванням запропонованих узагальненого математичного опису, числових методів та реалізуючих їх алгоритмів.

Моделювання хвильових процесів у пароріднній двофазній системі. В якості вихідної ММ, що описує динамічний процес для рівновагового випадку утворення та розповсюдження хвилі у пароріднній двофазній суміші, розглянемо систему, яку утворює рівняння динаміки, аналогічне по виду до (2.14)

$$\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial t^2} - c_3^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2} + \frac{2\beta\chi}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial t^2} - c_1^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2} \right] = \\ = \frac{3\gamma P_0(\mathbf{x})}{R_0 \rho_2 L} \cdot \frac{\partial q_1(t,\mathbf{x})}{\partial t}, \tag{3.52}$$

з початковими

$$P(t,\mathbf{x})\big|_{t=0} = P_0(\mathbf{x}) \tag{3.53}$$

та граничними (на вході пароріднного потоку) умовами

$$P(t,\mathbf{x})\big|_{x_1=x_2=\ldots=x_n=0} = \phi(t). \tag{3.54}$$

В термінах узагальненої ММ (3.5) — (3.7) система (3.52) — (3.54) набуде наступного вигляду:

$$G(P,t,\mathbf{x}) \frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial t^2} = -A(P,t,\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2} + D(P,t,\mathbf{x}) P_0(\mathbf{x}), \tag{3.55}$$

$$P(0,\mathbf{x}) = P_0(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3.56}$$

$$P(t,0) = \phi(t), \tag{3.57}$$

де $G(P,t,\mathbf{x})=\left(1+\dfrac{2\beta\chi}{c_2^2}\right)$; $A(P,t,\mathbf{x})=-\left(c_3^2-c_1^2\right)$; $D(P,t,\mathbf{x})=\left[\dfrac{3\gamma}{R_0\rho_2 L}\cdot\dfrac{\partial q_1(t,\mathbf{x})}{\partial t}\right]$.

Реалізацію задачі (3.55) — (3.57) здійснено із застосуванням алгоритму, представленому в розділі 3.2.1. Вихідні дані для задачі наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Вихідні дані щодо моделювання хвильових процесів у пароріднинній двофазній системі

№ з/п	Найменування параметра	Позначення параметра	Одиниця вимірювання	Числове значення
1	2	3	4	5
1	**Геометричні розміри каналу, в якому рухається пароріднинний двофазний потік:**			
	— довжина	x	м	10,3
	— діаметр	D	м	0,57
2	**Час прогнозу**			
	— при врахуванні $T_{\text{ос.ср}}(t)$	$t_{\text{к}}$	*год*	2,5
	— без врахування $T_{\text{ос.ср}}(t)$	$t_{\text{к}}$	*год*	2,5
3	**Фізико-хімічні характеристики:**			
	— густина рідини	μ	мПа · с	3,71
	— теплоємність рідини	C_p	Дж/К	0,506
	— коефіцієнт теплопередачі від стінки каналу до рідини	α	Вт/м · К	$5{,}3\cdot10^{-4}$
4	**Початкові та граничні умови:**			
	— початкова температура рідини та стінки каналу	$T_{\text{вн}_0}$, $T_{\text{ст}_0}$	C^0 (К)	20 (297)
	— середня температура оточуючого середовища	$T_{\text{ос.ср}}$	C^0 (К)	27 (304)
5	**Точність моделювання**	δ	%	5,0

Моделювалося утворення ударних хвиль у каналі круглого перерізу при русі по ньому пароріднинної двофазної суміші та впливі на неї куполоподібного збудження, заданого початковим розподілом виду $U(t) = U_{\max} \exp\left(-\xi^2\right)$. Прогноз здійснювався для двох випадків; при врахуванні середньої температури оточуючого середовища $T_{\text{ос. ср}}(t)$ та без її врахування.

Результати моделювання показали (рис. 3.2 — 3.3), що ударні хвилі утворюються у вигляді солітонів (хвильових скупчень), що цілком узгоджується з результатами експериментальних досліджень [157], отриманих за тих самих вихідних даних. Вершини солітонів орієнтовані уздовж координати, що співпадає з віссю каналу, де рухається пароріднинна суміш, а відстань між солітонами постійно збільшується.

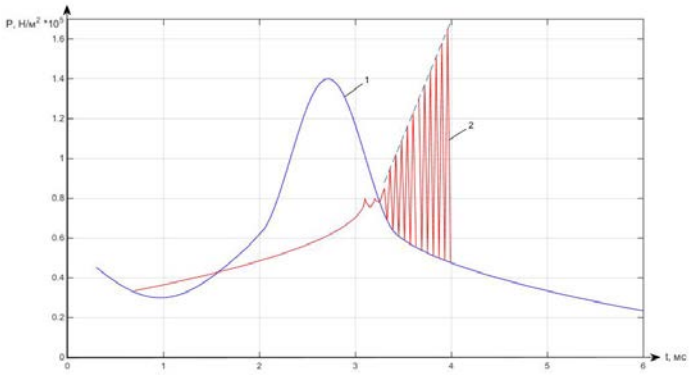


Рис. 3.2. — Утворення солітону з куполоподібного збудження при $\mathrm{Re} = 1{,}7$:
1. — сигнал збудження;
2. — форма солітону.

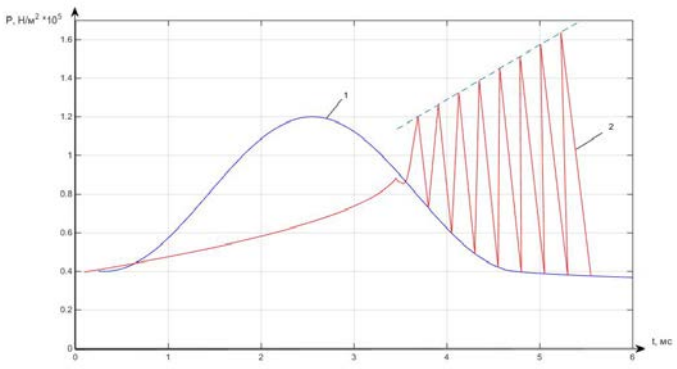


Рис. 3.3. — Утворення солітону з куполоподібного збудження при $\mathrm{Re} = 23{,}4$:
1. — сигнал збудження;
2. — форма солітону.

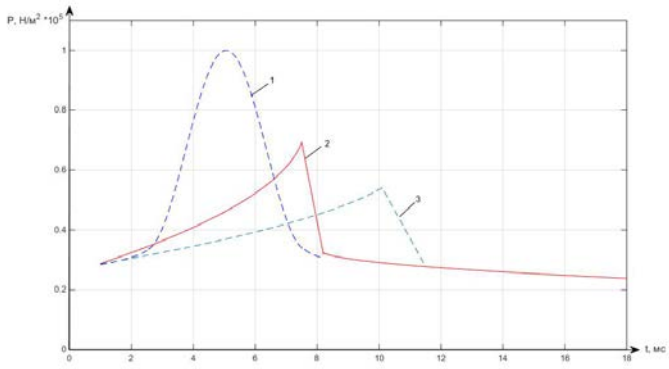


Рис. 3.4. — Розвиток сигналу у дисперсному середовищі зі значною густиною:
1. — $\rho = 2{,}4 \cdot 10^4$ кг/м^3 ;
2. — $\rho = 6{,}4 \cdot 10^4$ кг/м^3 ;
3. — $\rho = 8{,}3 \cdot 10^4$ кг/м^3 .

Результати числового розв'язку задачі (3.55) — (3.57) для значних густин (рис. 3.4) свідчить, що в цьому випадку ніяких осциляцій сигналу в процесі еволюції збудження не виникає. При малих значеннях параметру дисперсії та значній густині (рис. 3.4) сигнал еволюціонує у відповідності до лінійного закону. Простежуючи картину еволюції сигналу при зміні ефективної густини та значних чисел Рейнольда (чисел Re) суміші можна спостерігати, що реалізується режим хвильових пакетів, який переходить в осциляторну ударну хвилю.

Підвищення ефективної густини суміші, тобто зменшення чисел Re, призводить до згладжування всіх осциляцій Ударна хвиля з осциляторним «хвостом» перетворюється у звичайну монотонну ударну хвилю.

Моделювання бульбашкового режиму у пароріднинній двофазній системі. При числовому дослідженні бульбашкового режиму у пароріднинній двофазній системі в якості виразу, що описує нерівноваговий динамічний процес, розглянемо варіаційну нерівність виду (2.57), яка, з урахуванням узагальненої ММ (3.15), (3.16), може бути представлена наступним чином:

$$P \in K : \left(\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial t^2}, \left[v(t,\mathbf{x}) - P(t,\mathbf{x}) \right] \right) \le$$

$$\le \left(B(\gamma)\, P(t,\mathbf{x}), \left[v_P(t,\mathbf{x}) - P(t,\mathbf{x}) \right] \right) + \mathbf{j}\left[v_P(t,\mathbf{x}) \right] - \mathbf{j}\left[P(t,\mathbf{x}) \right] \qquad (3.58)$$

з початковою та граничною умовами

$$\left. \begin{array}{l} P(0,\mathbf{x}) = P_0(\mathbf{x}), \\ \dfrac{\partial P(t,\mathbf{x})}{\partial \eta} = \xi(t,\mathbf{x}) \end{array} \right\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \qquad (3.59)$$

де

$$\left(B(\gamma)\,P(t,\mathbf{x}),\left[v_P(t,\mathbf{x})-P(t,\mathbf{x})\right]\right)=$$

$$=\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}}\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P(t,\mathbf{x})}{P_0(\mathbf{x})}\right]^2\right\}dx,$$

$$\mathbf{j}\left[v_P(t,\mathbf{x})\right]=\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\left|v_P(t,\mathbf{x})\right|}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\left|v_P(t,\mathbf{x})\right|-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P(t,\mathbf{x})}{P_0(\mathbf{x})}\right]^2\left|v_P(t,\mathbf{x})\right|\right\}dx,$$

$$\mathbf{j}\left[P(t,\mathbf{x})\right]=\frac{\dfrac{c_0^2}{\left(1+c_0^2/c_s^2\right)}}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\left|P(t,\mathbf{x})\right|}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\left|P(t,\mathbf{x})\right|-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{\Delta P(t,\mathbf{x})}{P_0(\mathbf{x})}\right]^2\left|P(t,\mathbf{x})\right|\right\}dx.$$

Реалізацію задачі (3.58), (3.59) здійснено із застосуванням алгоритму, представленому в розділі 3.2.2. Вихідні дані для задачі наведено у табл. 3.2.

Моделювався бульбашковий режим плину пароріднинної двофазної системи у каналі прямокутного перерізу при врахуванні впливу на двофазну систему температури оточуючого середовища та без такого врахування. За температуру оточуючого середовища бралося середнє значення у вигляді величини $T_{\text{ос. ср}}(t)$.

Досліджувався процес зростання парових бульбашок у полі хвилі розрідження (рис. 3.5). Такий профіль хвилі завжди має місце при скиданні тиску в системі (наприклад, при розгерметизації каналу-трубопроводу). Було прийнято,

що тривалість перехідного періоду (ділянка АВ) складає одиниці мілісекунд, і на цей час приходиться переважна частина зміни радіусу бульбашки.

При зниженні початкового тиску $P_0(\mathbf{x})$ у пароріднинній суміші спостерігається як зростання наявних в ній бульбашок (тобто збільшується насиченість паром суміші), так і виникнення та зростання нових.

Таблиця 3.2

Вихідні дані щодо моделювання бульбашкового режиму у пароріднинній двофазній системі

№ з/п	Найменування параметра	Позначення параметра	Одиниця вимірювання	Числове значення
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**Геометричні розміри каналу, в якому рухається пароріднинний двофазний потік:**			
	— довжина	x_1	м	35,8
	— ширина	x_2	м	0,42
2	**Час прогнозу**			
	— при врахуванні $T_{\text{ос.ср}}(t)$	$t_{\text{к}}$	*год*	2,5
	— без врахування $T_{\text{ос.ср}}(t)$	$t_{\text{к}}$	*год*	2,5
3	**Фізико-хімічні характеристики:**			
	— густина рідини	μ	мПа · с	2,47
	— теплоємність рідини	C_p	Дж/К	0,472
	— коефіцієнт теплопередачі від стінки каналу до рідини	α	Вт/м · К	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$
4	**Початкові та граничні умови:**			
	— початковий тиск в каналі	$P_{10}(\bar{x})$	$H/\text{м}^2$	$3{,}4 \cdot 10^5$
		$P_{20}(\bar{x})$	$H/\text{м}^2$	$6{,}2 \cdot 10^5$

Продовження таблиці 3.2

1	2	3	4	5
	— початкова температура рідини та стінки каналу	$T_{\text{вн}_0}$, $T_{\text{ст}_0}$	C^0 (K)	20(297)
	— середня температура оточуючого середовища	$T_{\text{ос.ср}}$	C^0 (K)	30(307)
5	**Точність моделювання**	δ	%	5,0

Числовий експеримент показує, що їх зародження відбувається на протязі одиниць мікросекунд після приходу хвилі, в тому числі і правіше точки В (рис. 3.5). Причому розрахунки показують, що в останньому випадку зростання бульбашок (паронасиченості $S_{\text{п}}$) відбувається у постійному в часі полі температури $T_{\text{вн}}(t) = \text{const}$. Результати числових розрахунків зростання парових бульбашок для значень $P_{10}(\mathbf{x})$ та $P_{20}(\mathbf{x})$ представлено на рис 3.6) відповідно.

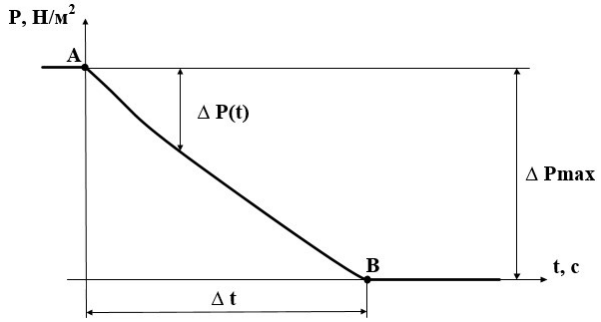


Рис. 3.5. — Профіль хвилі розрідження

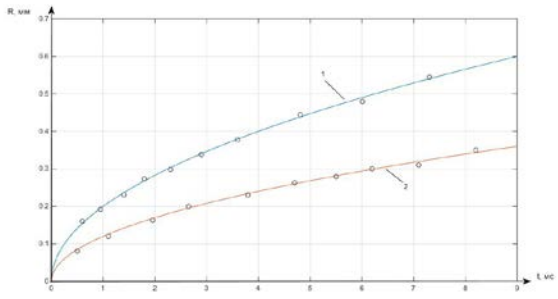


Рис. 3.6 — Зростання бульбашок пару у постійному полі тиску:

1. — для значення $P_{10}(\bar{x})$;
2. — для значення $P_{20}(\bar{x})$

Із зазначеною точністю розв'язок задачі в обох випадках прогнозу (моделювання хвильових процесів та розвитку бульбашкового режиму у пароріднинній двофазній системі) досягнуто не більш ніж за 4-и кроки відповідного ітераційного процесу (процесу Зейделя — для рівновагової ММ

хвильових процесів, або оптимізаційної процедури пошуку максимуму функції Гамільтона — для нерівновагової ММ розвитку бульбашкового режиму).

Розв’язок поставленої тестової задачі реалізовано за допомогою розроблених інструментальних програмно-алгоритмічних засобів (ІПАЗ), інтерфейси яких представлено у додатку В.

Висновки до розділу 3

1. Для типових випадків динамічних станів пароріднинних двофазних систем, на основі запропонованих відповідних ММ, виконано узагальнення їх (станів) математичного опису. Таке узагальнення дозволило виконати формалізацію та уніфікацію методів числової реалізації ММ у випадках рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем. Це дозволило створити засоби математичного моделювання досліджуваних класів динамічних станів пароріднинних двофазних систем, а також здійснити машинну реалізацію розроблених ММ на єдиній уніфікованій основі.

2. Запропоновано метод числової реалізації узагальненої ММ рівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем, який (метод) зводиться до дискретизації неперервної узагальненої ММ за явно-неявною схемою та наступному розв’язуванні результуючої системи дискретних алгебраїчних рівнянь за ітераційним процесом Зейделя. Метод забезпечує безумовну збіжність процедури розв’язування отриманої системи дискретних (різницевих) рівнянь та дозволяє при цьому скоротити обчислювальні витрати, що зумовлено застосуванням економічних різницевих схем.

3. Запропоновано метод числової реалізації узагальненої ММ нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем. Метод засновано на розв’язуванні оптимізаційної задачі і зводиться до пошуку максимуму функції Гамільтона, записаної для розширеної узагальненої ММ динаміки нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем. Відмінністю запропонованого методу є можливість реалізовувати ММ, які формалізовано у вигляді функцій з кусково-неперервним характером, що притаманно більшості нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем.

4. Розроблено алгоритми, що реалізують в уніфікованій формі запропоновані методи розв’язування математичних співвідношень, що складають

ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем.

Виконано числове дослідження дискретних аналогів узагальнених ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднинних двофазних систем, яке на тестових прикладах показало ефективність застосування запропонованих ММ та методів їх реалізації.

РОЗДІЛ 4. КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ

В цьому розділі розглянемо питання, пов'язані з розробкою комп'ютерних засобів розв'язування задач математичного моделювання динамічних станів пароріднних двофазних систем. Використовуючи їх як інструментальну базу, розглянемо приклади застосування запропонованих ММ та методів реалізації останніх до математичного моделювання зазначених динамічних станів в умовах реальних технологічних процесів в енергетиці та переробних галузях промисловості.

4.1. Структурна організація обчислювальних процедур в комплексі інструментальних програмно-алгоритмічних засобів

Інструментальні програмно-алгоритмічні засоби (ІПАЗ) математичного моделювання динамічних станів пароріднних двофазних систем являють собою користувацькі додатки (Додаток В), створені на платформі проблемно-орієнтованого пакету Matlab [94 — 97].

Вибір програмної платформи у вигляді проблемно-орієнтованого пакету Matlab при створенні ІПАЗ для розв'язування задач математичного моделювання динамічних станів пароріднних двофазних систем зумовлено наступними чинниками:

— пакет складається із самостійних структурно незалежних та функціонально завершених програмних модулів, які дозволяють гнучко (та за умови оптимізації ресурсних витрат) формувати обчислювальні блоки щодо розв'язування конкретних прикладних задач;

— пакет дозволяє виконати будь-які математичні операції із використанням розширеного математичного апарату (в тому числі: розв'язування СЛАР, ДРЧП, операції над матрицями тощо);

— пакет забезпечує можливість створювати вбудовані функції;

— пакет, завдяки створенню користувацьких додатків, дозволяє розв’язувати значну гаму інженерних та наукових задач, включаючи моделювання (математичне, імітаційне), ідентифікацію (структурну, параметричну), обробку різного роду сигналів та зображень тощо;

— пакет має значний набір інструментарію представлення результатів розв’язку прикладних задач, включаючи графічний інтерфейс.

Також при розробці інструментальних програмно-алгоритмічних засобів моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем було враховано обчислювальні особливості, які забезпечує платформа Matlab, а саме: *ефективність* — процесорний час моделювання, число ітерацій та точність результатів; а також *надійність* — здатність успішно розв’язувати поставлені задачі, достовірність отриманих результатів, здатність обробки (аналізу та виправлення) помилкових ситуацій.

З урахуванням викладених вимог було організовано програмний комплекс ІПАЗ математичного моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем, структуру організації обчислювальних процедур в якому представлено на рис. 4.1.

Послідовність розв’язування задач математичного моделювання, які розглядаються в чинній дисертаційній роботі, при застосуванні комплексу ІПАЗ поділяється на етапи, сутність та основний зміст яких розглянуто нижче (для конкретності викладення, але не знижуючи його загальності, у подальшому розглядатимемо переважно, крім оговорених випадків, рівновагові динамічні стани).

Завдання рівняння динаміки стану пароріднинної двофазної системи. При завданні рівняння певного динамічного стану за основу береться узагальнена ММ виду (3.5) — (3.7) (або (3.15), (3.16) — для нерівновагових динамічних станів) в частині рівняння у частинних похідних виду (3.5) (або варіаційної нерівності — (3.15)).

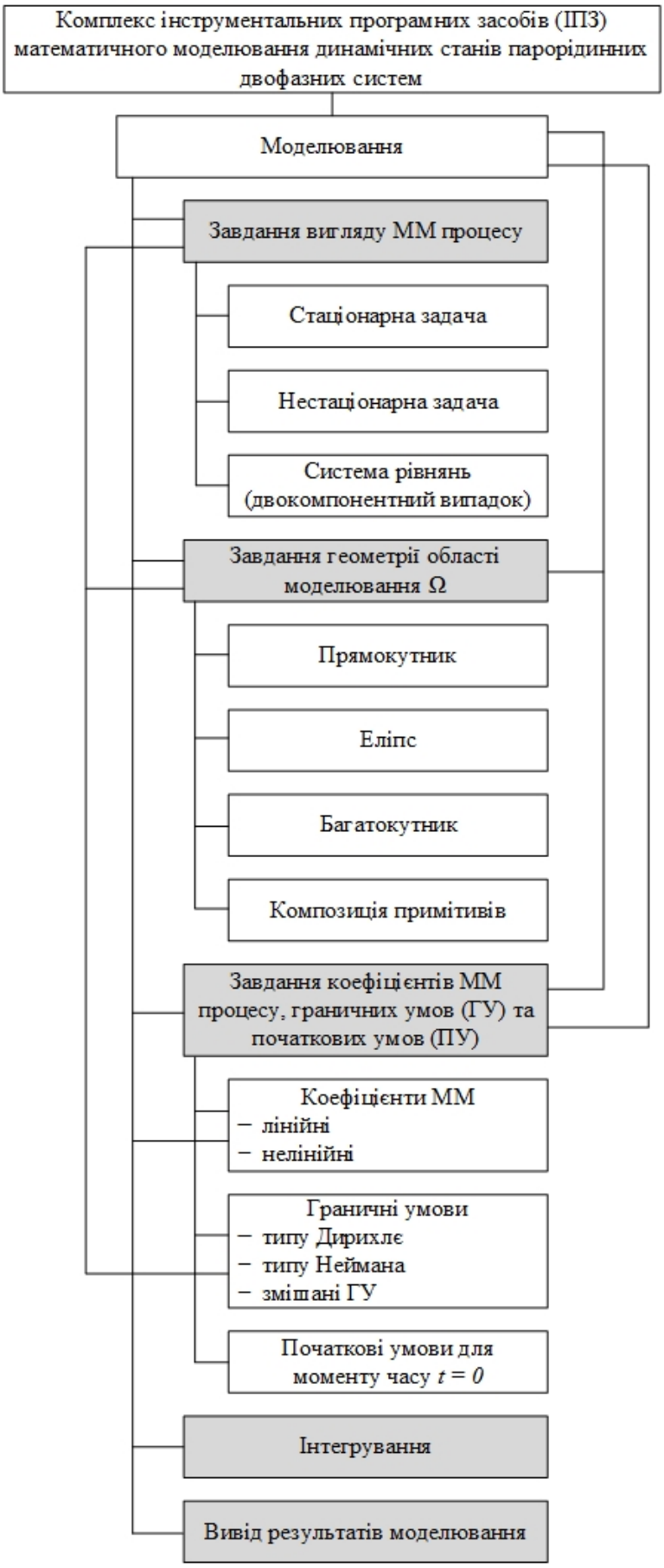


Рис. 4.1. — Структура обчислювальних процедур, які реалізуються ІПАЗ

На підставі останнього, шляхом визначення коефіцієнтів, дифузійних та динамічних членів (тобто відповідних частинних похідних за простором та за часом), формується вид конкретного рівняння динаміки, що відповідає певному динамічному стану пароріднної двофазної системи, який (стан) досліджується.

Завдання виду рівняння динаміки здійснюється в режимі **Type equation** для двох альтернативних варіантів: **One equation** або **System differential equations**. В кожному з альтернативних варіантів, який задається відповідним діалоговим вікном, пропонується вид диференційних рівнянь (відповідно, одне — для першого варіанта або система з декількох рівнянь (системи рівнянь) — для другого варіанта).

В обох зазначених варіантах реалізуються нестаціонарні гіперболо-параболічні рівняння, які в операторному представленні мають вигляд:

$$\frac{\partial \Phi(t,\mathbf{x})}{\partial t} = d_1(\cdot)\Phi(t,\mathbf{x}) + d_2(\cdot)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi(t,\mathbf{x})}{\partial x_i} + d_3(\cdot)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2} +$$

$$+ \mathbf{U}_g(t,\mathbf{x}) + D_l(\Phi,t,\mathbf{x}), \quad g = \overline{1,G}\,;\ l = \overline{1,L} \qquad (4.1)$$

де $d_1(\cdot), d_2(\cdot), d_3(\cdot)$ — коефіцієнти при дифузійних членах, що характеризують якісний вид певного динамічного стану та які визначаються фізико-хімічними параметрами (густиною, теплоємністю, коефіцієнтами теплопередачі та конвективного теплообміну, тощо); $g = \overline{1,G}$; $l = \overline{1,L}$ — число точкових зовнішніх управлінь, завданих вектором $\mathbf{U}_g(t,\mathbf{x})$ та збуджень, завданих функціями $D_l(\Phi,t,\mathbf{x})$ (у вигляді контрольованих та неконтрольованих джерел енергії), відповідно. Інші позначення, прийняті в (4.1), співпадають з відповідними для узагальненої моделі (3.5) — (3.7).

В разі завдання системи диференційних рівнянь, то для кожного рівняння передбачено своє поле запису. Наявність точкових джерел або управлінь, що представлено в (4.1) відповідно членами $D_l(\Phi,t,\mathbf{x})$ та $\mathbf{U}_g(t,\mathbf{x})$, також задається у передбачених полях діалогових вікон.

Коефіцієнти ММ досліджуваного динамічного стану пароріднинної двофазної системи задаються в режимі **Set model parameters**. В залежності від конкретного виду ММ можуть бути встановленими *постійні* або *змінні* коефіцієнти правої частини (4.1). При цьому коефіцієнти можуть бути завдані однотипними як у всій області моделювання Ω, так і в окремих локальних областях Ω_j, $j=1,2,...,n$.

Коефіцієнти $d_1(\cdot), d_2(\cdot), d_3(\cdot)$, що визначають характер дифузійних процесів за час $t_к$ плину пара рідинної суміші, завдаються в діалоговому вікні **Liquid parameters** наступним чином. В режимі завданні вихідних даних, зі звертанням до вказаного вікна, відображається загальний вид правої частини (4.1) для динамічного стану для випадків **One equation** або **System differential equations**.

За умови незмінних (або близьких до них) фізико-хімічних параметрів досліджуваного динамічного стану пароріднинної двофазної системи коефіцієнти $d_1(\cdot), d_2(\cdot), d_3(\cdot)$ завдаються постійними числами, а відповідні дифузійні члени (за наявності кожного з них у рівнянні динаміки виду (4.1)) набувають такого вигляду:

$$d_1\Phi(t,\mathbf{x}),\ \ d_2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi(t,\mathbf{x})}{\partial x_i},\ \ d_3\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(t,\mathbf{x})}{\partial x_i^2}. \qquad (4.2)$$

При завданні змінних (тобто нестаціонарних) та нелінійних (зокрема, степеневих або з певним видом функціональної залежності від членів, що входять у рівняння динаміки виду (4.1)) коефіцієнтах останні визначаються наступним чином. Необхідний вид залежності коефіцієнтів $d_1(\cdot), d_2(\cdot), d_3(\cdot)$, наприклад, від просторових координат $\mathbf{x}=\{x_i\}, i=\overline{1,n}$ або від шуканої функції $\Phi=\Phi(t,\mathbf{x})$, визначається певним математичним виразом та приймають (у вказаних випадках) наступний вигляд:

$$d_1 = d_1(\mathbf{x}),\ d_2 = d_2(\mathbf{x}),\ \ d_3 = d_3(\mathbf{x})$$

або

$$d_1 = d_1[\Phi(t,\mathbf{x})],\ d_2 = d_2[\Phi(t,\mathbf{x})],\ \ d_3 = d_3[\Phi(t,\mathbf{x})].$$

Завдання початкових та граничних умов. Переважна більшість задач із дослідження динаміки пароріднних двофазних систем являють собою *нестаціонарні* задачі, що вимагає (для розв'язку останніх) завдання *початкових умов* (ПУ), тобто значення шуканої функції $\Phi = \Phi(t,\mathbf{x})$ на момент $t = t_0$, з якого починається розв'язок задачі. Слід зазначити, що у деяких випадках приймається тривіальне значення $t = 0$ (іншими словами: відкидається передісторія розвитку динамічного процесу).

Початкові умови при роботі ІПАЗ завдаються в режимі **Initial conditions**, а їх формалізований вигляд записується наступним чином:

$$\Phi(t,\mathbf{x}) \equiv \Phi(t,\mathbf{x})\big|_{t=t_0} = \Phi_0(\mathbf{x}), \tag{4.3}$$

де Φ_0 — нормоване значення ПУ, яке може бути перевизначено на будь-якому етапі підготовки до розв'язування прикладної задачі перед інтегруванням диференційних рівнянь динаміки (4.1).

Оскільки динамічний процес у пароріднній двофазній системі (суміші) розвивається у просторовій області Ω з границею Γ, на якій мають місце різні фізичні явища взаємодії суміші з оточуючим середовищем. Така взаємодія при математичному моделюванні формалізується у вигляді відповідних *граничних умов* (ГУ). В розділі 2 було вказано, що для динамічних станів пароріднних двофазних систем характерними є: завдання функції (потенціалу) на границі Γ — тобто ГУ 1 роду (типу Діріхлє), а також одночасне завдання функції (потенціалу) на границі Γ та потоку (перетікання потенціалу) через неї — тобто ГУ 3 робу (або «змішані» ГУ).

При функціонуванні ІПАЗ завдання необхідних ГУ здійснюється наступним чином. Спочатку обирається режим завдання граничних умов **Set boundary**. Даний режим передбачає можливість завдання однотипних ГУ для всієї границі Γ просторової області Ω, або для окремих її ділянок $\Gamma_r \in \Gamma$, де r — загальне число ділянок, на яке розбито границю Γ. При цьому геометрію області Γ можна завдати в режимі **Model space**.

Надалі, в режимі **Type boundary condition** (у відповідному діалоговому вікні) вказується тип та значення ГУ, які завдаються:

— ГУ 1 роду представляються таким чином

$$\Phi(t,\mathbf{x}) \equiv \Phi(t,\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}=\Gamma} = \Phi_{\Gamma}, \tag{4.4}$$

де $\Phi_{г}$ — завдане значення шуканої вектор-функції на границі;

— ГУ 3 роду представляються таким чином

$$\Phi(t,\mathbf{x}) \equiv \Phi(t,\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}=\Gamma} = \Phi_{\Gamma} + \partial\Phi_{\eta}, \tag{4.5}$$

де $\Phi_{г}$ — завдане значення шуканої вектор-функції на границі; $\partial\Phi_{\eta}$ — завдане значення потоку через границю.

Граничні умови, так само як і початкові умови, можуть бути перевизначеними на будь-якому етапі підготовки розв'язання прикладної задачі, але перед інтегруванням диференційних рівнянь динаміки (4.1).

Завдання геометрії області моделювання. Результат розв'язування задач дослідження динамічних станів пароріднинних двофазних систем, як приклад типових задач дослідження процесів (об'єктів) з розподіленими параметрами, у значній мірі визначається адекватним (до реальних) завданням геометрії областей моделювання. В комплексі ІПАЗ, при завданні областей математичного моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем, запозичено *принцип конструктивної геометрії* — CBSG (Constructive Bloc Solid Geometry), який використовується в платформі Matlab для дослідження розподілених систем. У відповідності до даного принципу складна область моделювання Ω декомпозується на кінцеву сукупність геометрично простих (*елементарних* або *типових*) областей Ω_j, де j — загальне число типових областей. При цьому, для декомпозиції, застосовуються наступні елементарні під області: прямокутник та еліпс, варіювання параметрами яких можна створити всі можливі варіанти області моделювання Ω (або її складових Ω_j). Завдання геометрії області моделювання здійснюється у діалоговому вікні **Object identification/ location**. В процесі

моделювання допустимо змінювати геометрію просторової області Ω перед кожним циклом інтегрування рівняння динаміки виду (4.1).

Візуалізація результатів розв'язування задач моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем. Запропонований комплекс ІПАЗ забезпечує дві (найбільш поширені) форми візуалізації результатів розв'язання задачі:

— у вигляді графіків;

— у вигляді оцифрованих масивів.

Перші, у вигляді *пласких* або *тривимірних*, застосовуються, здебільшого, для *якісного* (і, частково, кількісного) відображення динаміки шуканої функції $\Phi = \Phi(t,\mathbf{x})$ в області моделювання Ω, включаючи її границю Γ (*профілі* та *поля* шуканої функції у вигляді тривимірних графіків), або в окремих перерізах області моделювання Ω (*профілі* шуканої функції у вигляді пласких графіків). Для ініціалізації режиму виведення графіків застосовується вбудована функція Matlab **— Handle Graphics.**

Оцифровані масиви (або, інакше — *таблиці*) застосовуються для кількісного відображення шуканої функції $\Phi = \Phi(t,\mathbf{x})$ в області моделювання Ω або її окремих під областях. Оцифровані масиви дають змогу отримати кількісні значення шуканої функції з необхідною точністю та кроками дискретизації (за простором та часом) області моделювання Ω та її границі Γ. Просторово-часові характеристики представлення оцифрованих масивів щодо результатів моделювання задаються перед етапом інтегрування рівняня динаміки виду (4.1).

На програмному рівні для візуалізації розв'язків задач моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем в комплексі ІПАЗ використовуються вбудовані функції **pdeplot** та **pdemesh** програмної платформи Matlab.

4.2. Моделювання рівновагового випарювання в задачі динаміки парової бульбашки

Важливою прикладною задачею при дослідженні динамічних станів пароріднинних двофазних систем є врахування рівновагового випарювання з утворенням парових бульбашок у каналі, в якому рухається пароріднинна суміш. Покажемо можливість розв'язування цієї задачі із застосуванням запропонованих у чинній дисертаційній роботі ММ та ІПЗ математичного моделювання.

Швидкість зростання парової бульбашки визначається в основному процесом теплообміну на границі «пар — рідина», а також інерцією рідини [158, 159]. При цьому виникає необхідність врахування нерівно вагового характеру фазового переходу. В цьому випадку кількість пару, що випарився, лімітується процесом рівновагового випаровування, тобто потік маси пару μ, який утворився, у першому наближенні можна оцінити за формулою Герца—Кнудсена [160 —162] (тут, і надалі, для простоти запису, опущено функціональну залежність розподілених функцій, зокрема тиску, від просторово-часових незалежних параметрів):

$$\mu = \frac{P_s - P_0}{\left(2\pi M R_{\text{г}} T_{\text{р}}\right)^{1/2}}, \tag{4.6}$$

де P_s, P_0 — парціальний тиск пару на поверхні рідини та в оточуючому середовищі, відповідно; M — молекулярна маса пароріднинної суміші у об'ємі V каналу, який розглядається; $R_{\text{г}}$ — універсальна газова постійна; $T_{\text{р}}$ — поточна температура рідини.

Схему зростання парової бульбашки наведено на рис. 4.2. Тут T_∞ — температура рідини при $x_2 \to \infty$ (x_2 — просторова координата у поперек каналу); T_σ — температура на границі бульбашки з боку рідини; T_s — температура насиченого пара на границі бульбашки; $\left(T_\sigma - T_s\right)$ — стрибок температури.

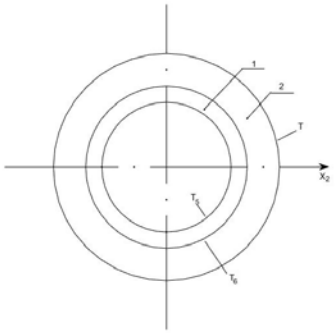


Рис. 4.2. — Схема росту парової бульбашки:

1.— область нерівно вагового випарювання;

2.— тепловий пограничний шар.

Для отримання формального опису досліджуваної задачі (суть її ММ) розглянемо можливість наближеного врахування процесу рівновагового випарювання. При цьому, з одного боку, потік маси пару μ, як було зазначено вище, визначається законом Герца—Кнудсена, що у більш зручній формі ніж (4.6), представляється наступним чином [158, 159]:

$$\mu = F(T_\sigma - T_s)L/T_s\,, \tag{4.7}$$

де $F = \chi\rho_2 \big/ \sqrt{2\pi M\overline{B}T_s}$; χ — коефіцієнт акомодації; ρ_2 — густина пару; L — теплота пароутворення; $\overline{B}$ питома газова постійна.

Тоді еквівалентний тепловий потік, який відповідає μ,

$$q_1 = \mu L = \beta(T_\sigma - T_s), \tag{4.8}$$

де $\beta = FL^2/T_s$.

З іншого боку,

$$q_1 = \alpha_1(t)(T_\infty - T_\sigma), \tag{4.9}$$

де α_1 — коефіцієнт тепловіддачі з боку рідини, який легко визначити, розв'язуючи зовнішню задачу теплообміну.

Виключаючи з (4.8), (4.9) невідому температуру T_σ, запишемо

$$q_1 = \alpha_2(t)(T_\infty - T_s), \tag{4.10}$$

де $\alpha_2(t) = [1/\alpha_1(t) + 1/\beta]^{-1}$.

Розглядаючи границю бульбашки як пласку, запишемо коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_1(t) = \lambda_1 / \sqrt{\pi a_1 t}$, де λ_1, a_1 — теплопровідність та температуропровідність рідини. Радіус бульбашки $R(t)$ визначається з рівняння теплового балансу

$$L\rho_2 dR(t)/dt = \alpha_2(t)(T_\infty - T_s), \tag{4.11}$$

звідки

$$R(t) = \int_0^t \frac{\alpha_2(t)(T_\infty - T_s)}{L\rho_2}. \tag{4.12}$$

Підстановка виразу для $\alpha_2(t)$ в рівняння (4.12) та наступне його інтегрування дають результат:

$$R(t) = \frac{2\lambda_1(T_\infty - T_s)}{L\rho_2\sqrt{\pi a_1}}\left[\sqrt{t} - \frac{\lambda_1}{\beta\sqrt{\pi a_1}}\ln\left(\frac{\beta\sqrt{\pi a_1}}{\lambda_1}\sqrt{t+1}\right)\right]. \tag{4.13}$$

Розв’язок рівняння (4.13), яке описує зростання бульбашки, є *наближеним*, оскільки температура границі T_σ — величина змінна в часі, так само і стрибок температури $\Delta T(t) = (T_\sigma - T_s)$ — є функцією часу, що у рамках постановки задачі, яка розглядається, не може бути визначеною. Для точного врахування впливу процесів акомодації на динамічний стан бульбашок у паро рідинній двофазній системі необхідно розв’язати *зовнішню* задачу щодо теплообміну в групі «бульбашка — рідина»

$$\partial T/\partial t = \alpha_1(t)\partial^2 T/\partial x_2^2 \tag{4.14}$$

з початковими

$$T\big|_{t=0,\,x_2=0} = T_\infty \tag{4.15}$$

та граничними умовами третього роду:

— при $x_2 = 0$

$$-\lambda_1 \partial T/\partial x_2 = \beta(T_\sigma - T_s); \tag{4.15}$$

— при $x_2 \to \infty$

$$T \to T_\infty . \tag{4.16}$$

В граничній умові (4.16) на поверхні бульбашки очевидною є тотожність $T \equiv T_\sigma$ — невідома величина, що і визначає специфіку поставленої задачі. Подальше розв'язування задачі (4.14) — (4.16) будемо проводити наступним чином. Уведемо нову змінну

$$\vartheta = \left(T - T_\infty\right)/\left(T_s - T_\infty\right). \tag{4.17}$$

Тоді рівняння (4.14) набуває вигляду

$$\partial\vartheta/\partial t = a_1 \partial^2 \vartheta/\partial x_2^2 \tag{4.18}$$

з початковими

$$\vartheta\big|_{t=0,\, x_2=0} = 0 \tag{4.19}$$

та граничними умовами

— при $x_2 = 0$

$$\lambda_1\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right) = \beta\left(\frac{T - T_s}{T_s - T_\infty}\right) = \beta\left(\vartheta - 1\right); \tag{4.20}$$

— при $x_2 \to \infty$

$$\vartheta = 0 . \tag{4.21}$$

Тоді очевидно, що

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\beta}{\lambda_1}\sqrt{\pi a_1}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_2^2}, \tag{4.22}$$

а вираз для теплового потоку набуде вигляду

$$q_1 = -\lambda_1 \frac{\partial\left(T - T_s\right)}{\partial t} = \beta\sqrt{\pi a_1}\,\frac{\partial^2\left(T - T_s\right)}{\partial x_2^2}. \tag{4.23}$$

З урахуванням (4.10), (4.12) формулу для обчислення радіусу бульбашки можна представити наступним чином

$$R(t) = \int_0^t \left(q_1 / L\rho_2\right) dt ,$$

а інтегрування останньої, з підстановкою виразу (4.23) для теплового потоку q_1, дає наступний результат

$$R(t)=\frac{2\lambda_1(T-T_s)}{L\rho_2\sqrt{\pi a_1}}\left\{\sqrt{t}-\frac{\lambda_1\sqrt{\pi}}{2\beta\sqrt{a_1}}\left[1-\exp\left(\frac{\beta^2 a_1 t}{\lambda_1^2}\right)\right]\right\}. \qquad (4.23)$$

Рівняння динаміки (4.22) (або (4.23) — відносно теплового потоку q_1) разом з початковими та граничними умовами (4.19) — (4.21) утворюють ММ рівновагового випарювання в задачі динаміки парової бульбашки, а вираз (4.23) дає змогу обчислити радіус зростаючої (в часі, оскільки $R(t)$ є функцією часу) бульбашки.

Числове розв'язування розглянутої задачі виконаємо із застосуванням розроблених ІПЗ на основі метода, запропонованого в розділі 3.2.1.

В термінах узагальненої ММ виду (3.5) — (3.7) система (4.22), (4.19) — (4.21) представляється як:

$$-G(t,\bar{x})\frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}=A(t,\bar{x})\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x_2^2} \qquad (4.24)$$

з початковими

$$\Delta T\big|_{t=0,\,x_2=0}=0 \qquad (4.25)$$

та граничними умовами

— при $x_2=0$

$$\lambda_1\left[\frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}\right]=\beta(\Delta T-1); \qquad (4.26)$$

— при $x_2\to\infty$

$$\Delta T=0, \qquad (4.27)$$

де $\Delta T=T-T_s$; $G(t,\bar{x})=\lambda_1$; $A(t,\bar{x})=\beta\sqrt{\pi a_1}$.

На рис. 4.3 наведено результати числових розрахунків на основі ММ виду (4.24) — (4.27) для випадку зростання бульбашок в рідкому азоті при $T=150\,K$ та $P=100$ кПа.

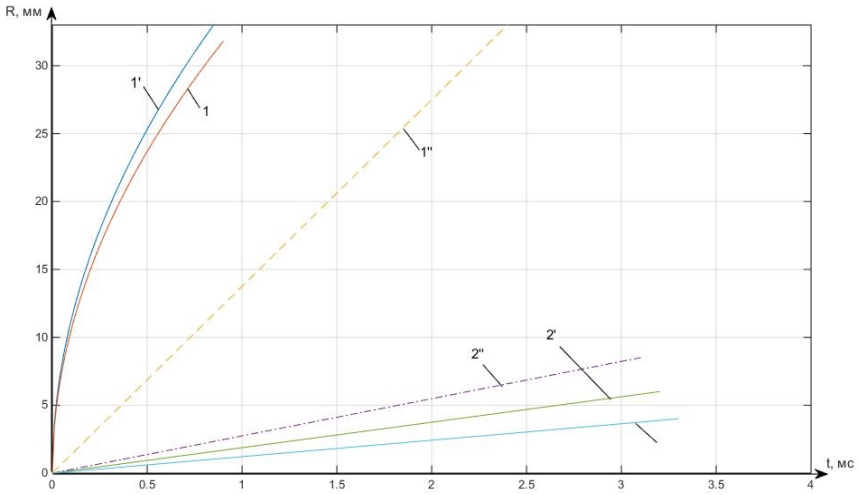


Рисунок 4.3. — Зростання динаміки бульбашки:

1. — по ММ виду (4.24) — (4.27);

2. — за даними [163].

Конструктивність зазначеної ММ та адекватність результатів, отриманих при розрахунках за нею, підтверджено порівнянням з експериментальними даними [163] для тих самих вихідних даних. Видно, що розрахунки за ММ (4.24) — (4.27) дають досить близьке співпадіння з експериментом [163] при достатньо широкому діапазонові коефіцієнту акомодації χ, що, зокрема, пояснюється врахуванням на динаміку бульбашок інерції рідини.

4.3. Моделювання динамічного стану виникнення та розвитку ударних хвиль у пароріднинних двофазних системах

Хвильові процеси в механіці двофазних систем займають особливе місце, оскільки найбільш яскраво ефекти неоднофазності проявляються при розповсюдженні хвиль, а з іншого боку, акустичні хвилі в таких системах — найбільш доступний та ефективний спосіб вивчення структури самої двофазної системи. Тому задача дослідження динамічного стану щодо виникнення та розвитку ударних хвиль у пароріднинних двофазних системах має важливе прикладне значення у практичних застосунках.

В літературі [164 — 166] відомо рівняння, що описує форму вільної поверхні рідини та утворення хвиль, які розповсюджуються в обидві сторони (рівняння Буссінеска)

$$\frac{\partial P(t,\mathbf{x})}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\frac{\delta P(t,\mathbf{x})}{P_0(\mathbf{x})}\right] + $$

$$+ 2\nu_{\text{еф}} \frac{\partial^2 P(t,\mathbf{x})}{\partial t\, \partial x_1^2} - 2\beta_1 \frac{\partial^4 P(t,\mathbf{x})}{\partial t^2\, \partial x_1^2}. \qquad (4.28)$$

Значення змінних, які входять до (4.28), було пояснено раніше (розділи 1 та 2).

Введемо безрозмірні параметри (тут і надалі, для спрощення запису, незалежні часові та просторові параметри у шуканих функцій опущено)

$$\widetilde{P} = \delta P(t,\bar{x})/\delta P_0 \; ; \; \tau = t/t_0 \; ; \; \xi = x_1/l_0 \, ,$$

де l_0, δP_0 — ширина та амплітуда початкового збудження, відповідно; $t_0 = l_0/U_0$, $U_0 = \dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\cdot\dfrac{\delta P_0}{P_0} c_0$ — масштабна швидкість.

Тоді (4.28) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial \tau^2} = M^{-2} + M^{-1}\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\widetilde{P}^2\right) + \frac{2}{\text{Re}}\frac{\partial^3 \widetilde{P}}{\partial \xi^2\, \partial \tau} + \frac{2}{\sigma^2}\cdot\frac{\partial^4 \widetilde{P}}{\partial \xi^2\, \partial \tau^2}. \qquad (4.29)$$

Тут $M = U_0 / c_0$, а $\mathrm{Re} = U_0 l_0 / \nu_{\text{еф}}$ та $\sigma^2 = U_0 l_0^2 / \beta_1 c_0$ являють собою параметри подібності (по відношенню до рівняння динаміки (4.28)).

Розглянемо можливість отримання розв'язку (4.29), вважаючи, що він описує структуру ударної хвилі. Для врахування швидкості хвилі υ в межах безрозмірної просторової координати, останню (у прийнятих позначеннях) будемо представляти як $\varsigma = \xi - \upsilon\tau$. Інтегруючи (4.29) по ς від $-\infty$ до $+\infty$ з початковою умовою $\widetilde{P}(\tau,\varsigma)\big|_{\tau=0,\,\upsilon=0} = \widetilde{P}_0(\varsigma)$ та граничними умовами:

— перед фронтом хвилі

$$\widetilde{P}(\tau,\varsigma)\big|_{\varsigma=0,\,\upsilon=0} = 0;\ \partial\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma = 0,\ \partial^2\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma^2 = 0$$

— за фронтом хвилі

$$\widetilde{P}(\tau,\varsigma)\big|_{\varsigma=1,\,\upsilon=0} = 1;\ \partial\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma = 0,\ \partial^2\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma^2 = 0$$

віднайдемо швидкість ударної хвилі

$$\upsilon = M^{-2} + M^{-1} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{\widetilde{P}^*}{\widetilde{P}_0} + \frac{\gamma+1}{\gamma+1}\right)\frac{c_0^2}{U_0^2}, \qquad (4.30)$$

де $\widetilde{P}^*$ — повний тиск за фронтом.

Розв'язування задачі (4.29) з наведеними вище початковими та граничними умовами не має особливостей обчислювального характеру і досить легко реалізується стандартними засобами платформи Matlab. Результати розв'язку представлено на рис. 4.4.

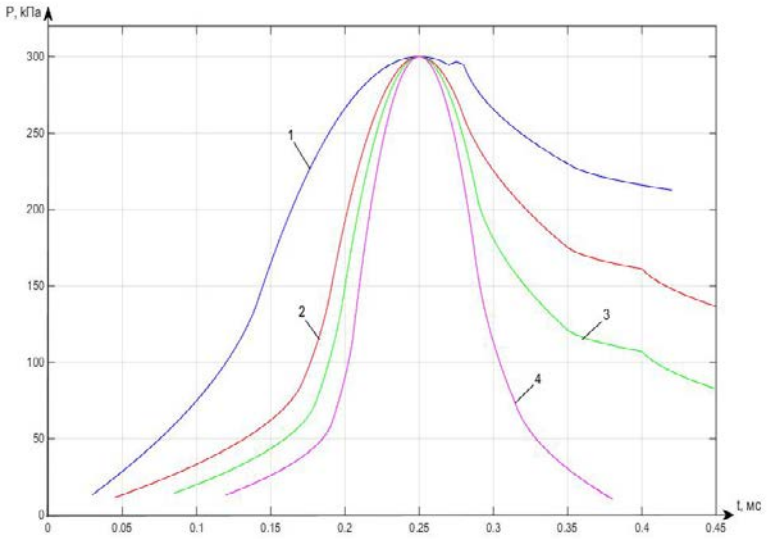


Рис. 4.4. — Результати розв’язування задачі (4.29):

1.— $\Delta P/P_0 < 1$;

2.— $\Delta P/P_0 < 3$;

3.— $\Delta P/P_0 > 3$;

4.— $\Delta P/P_0 \approx 50$.

Рівняння (4.29) задає структуру ударної хвилі у адіабатичному процесі, який (до певної міри) є ідеалізованим. При порушенні умов адіабатичності з’являється теплообмін з оточуючим середовищем, що призводить до значних похибок при застосуванні ММ ударних хвиль на основі рівняння динаміки (4.29). Покажемо можливість розв’язування задачі моделювання динамічного стану виникнення та розвитку ударних хвиль у пароріднинній двофазній системі при порушенні в ній умов адіабатичності.

Поява потоку теплообміну з оточуючим середовищем призводить до *модифікації* рівняння динаміки (4.29) з перетворенням його у наступну систему варіаційних нерівностей (з урахуванням тотожності викладок, проведених вище для системи варіаційних рівнянь виду (2.19)):

$$\begin{cases} \widetilde{P} \in K_{\widetilde{P}} : \left(\dfrac{\partial \widetilde{P}}{\partial \tau}, v_{\widetilde{P}} - \widetilde{P} \right) \le a_{\widetilde{P}} \left(\widetilde{P}, v_{\widetilde{P}} - \widetilde{P} \right) + \mathbf{j}\left(v_{\widetilde{P}} \right) - \mathbf{j}\left(\widetilde{P} \right); \forall v_{\widetilde{P}}, \widetilde{P} \in K_{\widetilde{P}}, \\ \widetilde{q}_1 \in K_{\widetilde{q}_1} : \left(\dfrac{\partial \widetilde{q}_1}{\partial \tau}, v_{\widetilde{q}_1} - \widetilde{q}_1 \right) \le a_{\widetilde{q}_1} \left(\widetilde{q}_1, v_{\widetilde{q}_1} - \widetilde{q}_1 \right) + \mathbf{j}\left(v_{\widetilde{q}_1} \right) - \mathbf{j}\left(\widetilde{q}_1 \right); \forall v_{\widetilde{q}_1}, \widetilde{q}_1 \in K_{\widetilde{q}_1}, \end{cases} \tag{4.31}$$

де відповідні білінійні форми та функціонали визначаються як

$$a_{\widetilde{P}} \left(\widetilde{P}, v_{\widetilde{P}} - \widetilde{P} \right) = \left(c_0 \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \left(v_{\widetilde{P}} - \widetilde{P} \right)}{\partial \xi} \right] \right\} d\xi, \tag{4.32}$$

$$a_{\widetilde{q}_1} \left(\widetilde{q}_1, v_{\widetilde{q}_1} - \widetilde{q}_1 \right) = \int_{\Omega} \left[1 - \frac{\partial^2 \widetilde{q}_1}{\partial \tau^2} \cdot \frac{\partial \left(v_{\widetilde{q}_1} - \widetilde{q}_1 \right)}{\partial \xi} \right] d\xi, \tag{4.33}$$

$$\mathbf{j}\left(v_{\widetilde{P}} \right) = \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial \xi^2} \cdot \left| v_{\widetilde{P}} \right| \right) d\xi, \tag{4.34}$$

$$\mathbf{j}\left(\widetilde{P} \right) = \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial \xi^2} \cdot \left| \widetilde{P} \right| \right) d\xi, \tag{4.35}$$

$$\mathbf{j}\left(v_{\widetilde{q}_1} \right) = \left(c_0 - \frac{2\gamma}{\sigma^2} \right) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial \xi^2} \cdot \left| v_{\widetilde{q}_1} \right| \right) d\xi, \tag{4.36}$$

$$\mathbf{j}\left(\widetilde{q}_1 \right) = \left(c_0 - \frac{2\gamma}{\sigma^2} \right) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial \xi^2} \cdot \left| \widetilde{q}_1 \right| \right) d\xi. \tag{4.37}$$

Систему варіаційних нерівностей (4.31) доповнимо початковими та граничними умовами

$$\widetilde{P}(0, \xi) = \widetilde{P}_0(\xi), \ \widetilde{q}_1(0, \xi) = \widetilde{q}_{1_0}(\xi), \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \eta} = \varphi_{\widetilde{P}}(\tau, \xi), \ \frac{\partial \widetilde{q}_1}{\partial \eta} = \varphi_{\widetilde{q}_1}(\tau, \xi) \tag{4.39}$$

Числове розв’язання задачі (4.31) — (4.39) дозволяє реалізувати алгоритм, запропонований у розділі 3.2.2. При цьому, для застосування зазначеного алгоритму, розробимо дискретний аналог задачі (4.31) — (4.39), ґрунтуючись на методі сумарної апроксимації [67].

На інтервалі моделювання $0 \le \tau \le \tau_к$ утворимо рівномірну сітку:

$$\omega_{\Delta t} = \left\{ t_m = m\Delta\tau;\ m = \overline{0, M};\ \Delta\tau = t_к / M \right\}.$$

Далі, інтервал дискретизації $\Delta\tau$ розіб'ємо на $i = 2$ шари, з огляду на «плаский» характер задачі, яка розв'язується, та також уводячи проміжну точку на часовому інтервалі

$$\tau_{m+1/2} = \tau_m + \frac{\Delta\tau}{2}.$$

Систему нерівностей (4.31) з початковими (4.38) та граничними (4.39) умовами замінимо наступною системою одновимірних рівнянь (враховуючи введення додатковий функцій $\theta_{\tilde{P}}(\cdot)$ та $\theta_{\tilde{q}_1}(\cdot)$ як алгебраїчні суми функціоналів $\mathbf{j}(v_{\tilde{P}})$, $\mathbf{j}(\tilde{P})$ та $\mathbf{j}(v_{\tilde{q}_1})$, $\mathbf{j}(\tilde{q}_1)$, у відповідності до процедури, описаної в розділі 3.1.2):

— для шару $i = 1$

$$\frac{m_{(1)}}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{P}_{(1)}}{\partial\tau} \cdot \frac{\partial\left(v_{\tilde{P}} - \tilde{P}\right)_{(1)}}{\partial\xi_{(1)}} = -\frac{1}{2}\left(c_0\,\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \cdot \int_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial^2 \tilde{P}_{(1)}}{\partial\xi_{(1)}^2} \cdot \frac{\partial\left(v_{\tilde{P}} - \tilde{P}\right)_{(1)}}{\partial\xi_{(1)}} \right] \right\} d\xi_{(1)} -$$

$$- \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{P}_{(1)}}{\partial\xi_{(1)}^2} \cdot \left| v_{\tilde{P}} \right|_{(1)} \right) - \left(\frac{\partial^2 \tilde{P}_{(1)}}{\partial\xi_{(1)}^2} \cdot \left| \tilde{P} \right|_{(1)} \right) \right] d\xi_{(1)}, \qquad (4.40)$$

$$\frac{m_{(1)}}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{q}_{1(1)}}{\partial\tau} \cdot \frac{\partial\left(v_{\tilde{q}_1} - \tilde{q}_1\right)_{(1)}}{\partial\xi_{(1)}} = -\frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ \left[1 - \frac{\partial^2 \tilde{q}_{1(1)}}{\partial\xi_{(1)}^2} \cdot \frac{\partial\left(v_{\tilde{q}_1} - \tilde{q}_1\right)_{(1)}}{\partial\xi_{(1)}} \right] \right\} d\xi_{(1)} -$$

$$- \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{q}_{1(1)}}{\partial\xi_{(1)}^2} \cdot \left| v_{\tilde{q}_1} \right|_{(1)} \right) - \left(\frac{\partial^2 \tilde{q}_{1(1)}}{\partial\xi_{(1)}} \cdot \left| \tilde{q}_1 \right|_{(1)} \right) \right] d\xi_{(1)}, \qquad (4.41)$$

$$\tilde{P}_{(1)}(0, \xi) = \tilde{P}_{(1)0}(\xi),\ \tilde{q}_{1(1)}(0, \xi) = \tilde{q}_{1(1)_0}(\xi), \qquad (4.42)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_{(1)}}{\partial\eta} = \varphi_{(1)\tilde{P}}(\tau, 0),\ \frac{\partial \tilde{q}_{1(1)}}{\partial\eta} = \varphi_{(1)\tilde{q}_1}(\tau, 0);\ \left(\tau_m < \tau \le \tau_{m+1/2};\ \xi_{(1)} = 0\right), \qquad (4.43)$$

— для шару 2

$$\frac{m_{(2)}}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{P}_{(2)}}{\partial\tau} \cdot \frac{\partial\left(v_{\tilde{P}} - \tilde{P}\right)_{(2)}}{\partial\xi_{(1)}} = -\frac{1}{2}\left(c_0\,\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \cdot \int_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial^2 \tilde{P}_{(2)}}{\partial\xi_{(2)}^2} \cdot \frac{\partial\left(v_{\tilde{P}} - \tilde{P}\right)_{(2)}}{\partial\xi_{(2)}} \right] \right\} d\xi_{(2)} -$$

$$-\frac{\gamma}{2}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2\widetilde{P}_{(2)}}{\partial\xi_{(2)}^2}\cdot\left|v_{\widetilde{P}}\right|_{(2)}\right)-\left(\frac{\partial^2\widetilde{P}_{(2)}}{\partial\xi_{(2)}^2}\cdot\left|\widetilde{P}\right|_{(2)}\right)\right]d\xi_{(2)}, \qquad (4.44)$$

$$\frac{m_{(2)}}{2}\cdot\frac{\partial\widetilde{q}_{1(2)}}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\left(v_{\widetilde{q}_1}-\widetilde{q}_1\right)_{(2)}}{\partial\xi_{(2)}}=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\left[1-\frac{\partial^2\widetilde{q}_{1(2)}}{\partial\xi_{(2)}^2}\cdot\frac{\partial\left(v_{\widetilde{q}_1}-\widetilde{q}_1\right)_{(2)}}{\partial\xi_{(2)}}\right]\right\}d\xi_{(2)}-$$

$$-\frac{\gamma}{2}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2\widetilde{q}_{1(2)}}{\partial\xi_{(2)}^2}\cdot\left|v_{\widetilde{q}_1}\right|_{(2)}\right)-\left(\frac{\partial^2\widetilde{q}_{1(2)}}{\partial\xi_{(2)}}\cdot\left|\widetilde{q}_1\right|_{(2)}\right)\right]d\xi_{(2)}, \qquad (4.45)$$

$$\widetilde{P}_{(2)}\left(\tau_{m-1/2},\xi\right)=\widetilde{P}_{(1)}\left(\tau_{m+1/2},\xi\right),\ \widetilde{q}_{1(2)}\left(\tau_{m-1/2},\xi\right)=\widetilde{q}_{1(1)}\left(\tau_{m+1/2},\xi\right), \qquad (4.46)$$

$$\frac{\partial\widetilde{P}_{(2)}}{\partial\eta}=\varphi_{(2)\widetilde{P}}\left(\tau,0\right),\ \frac{\partial\widetilde{q}_{1(2)}}{\partial\eta}=\varphi_{(2)\widetilde{q}_1}\left(\tau,0\right);\ \left(\tau_{m+1/2}<\tau\le\tau_{m+1};\ \xi_{(2)}=0\right). \qquad (4.47)$$

Як і в розділі 3.1.2, індекс в круглих скобках показує, для якого шару за просторовою координатою записано відповідні рівняння.

Дискретну задачу (4.40) — (4.47) орієнтовано на розв'язування із застосуванням інтегро-інтерполяційного методу [152], який приводить до консервативних сіткових аналогів для просторової області Ω.

Числові експерименти щодо дослідження зародження та розповсюдження ударних хвиль виконано для реальної двофазної системи, яку утворено водно-глицериновим розчином з густиною $\rho=1180\ \text{кг}/\text{м}^3$, ефективною в'язкістю $\nu_{\text{еф}}=1{,}8\cdot10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с}$ та насиченням бульбашками вуглекислого газу (CO_2). В табл.. 3.1 наведено основні характеристики збуджень та середовища.

Застосування бульбашок CO_2 з $R_0\approx1\ \text{мм}$ забезпечило виконання умови $R>>\sqrt{a_2t}$ (де $\sqrt{a_2t}$ — масштаб глибини проникнення теплового шару всередину бульбашки за час t) в широкому діапазоні тривалості збуджень та дозволило розглядати поведінку газу у бульбашках як наближене до адіабатичного. Газовміст у всіх дослідах дорівнював $\chi=0{,}01$.

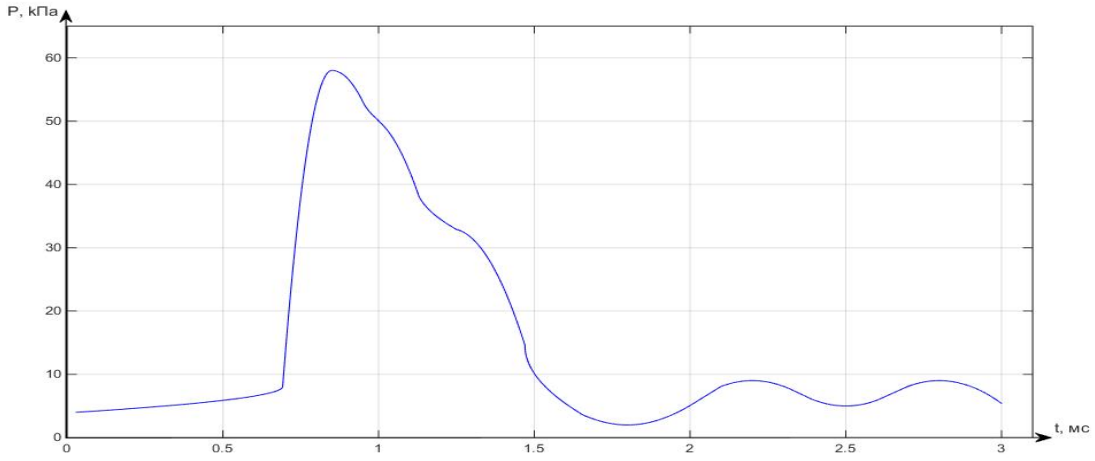
Таблиця 4.1.

Характеристики збуджень та середовища

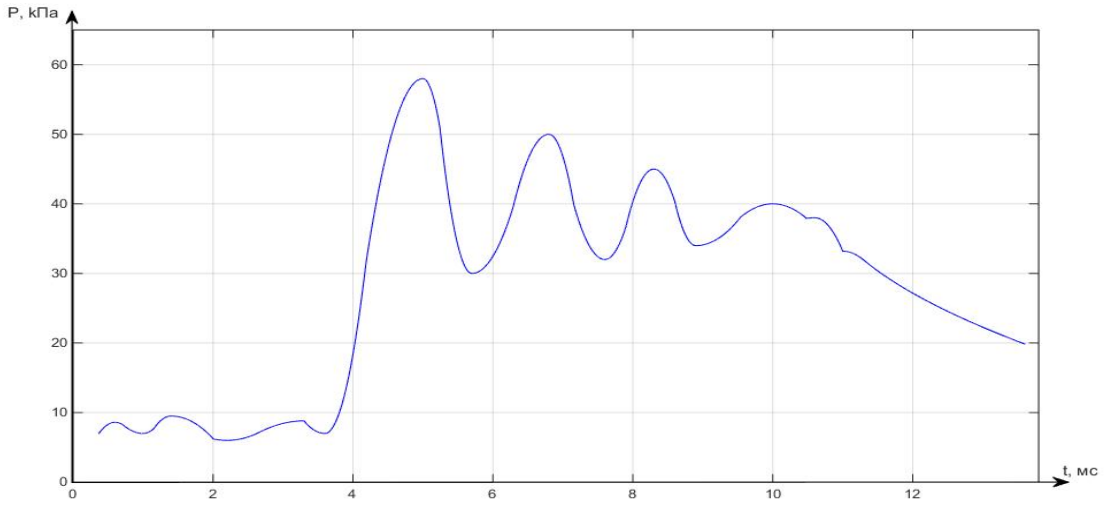
Рис.4.5	σ	Re	σ/Re	L, м	**Характеристика сигналу**
а	12	356	0,034	0	Характерний вигляд початкового імпульсу
б	—	—	0,5	0,6	Ударна хвиля
в	53	3500	0,015	1,4	Багатосолітонне збудження
г	30	1500	0,02	1,4	Двосолітонне збудження
д	12	360	0,044	0,6	Одиночний солітон
є	3,4	48	0,071	0,6	Хвильовий пакет

Застосування вуглекислого газу дозволило також отримати малі значення параметру σ/Re у всіх дослідах, наведених на рис. 4.5.

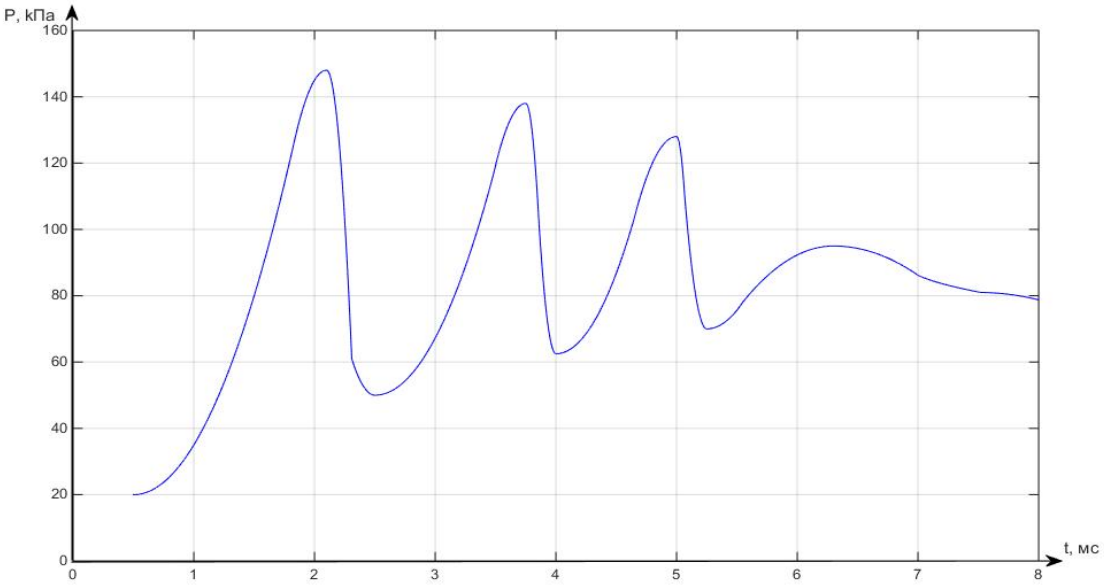
Початкове збудження являло собою ударну хвилю трикутного профілю з перепадом тиску у фронті $\delta\widetilde{P}_0$ та повною шириною $l_0 = \upsilon t_0$, де t_0 — час додатної фази тиску. В залежності від значення параметру σ початкове збудження розпадається послідовність усамітнених хвиль-солітонів, якщо $\sigma \approx \sigma_{кр}$ (рис. 4.5, в — д), або трансформується у хвильовий пакет, якщо $\sigma < \sigma_{кр}$ (рис. 4.5, є). Для трикутного збудження $\sigma_{кр} = 14{,}9$ [167].



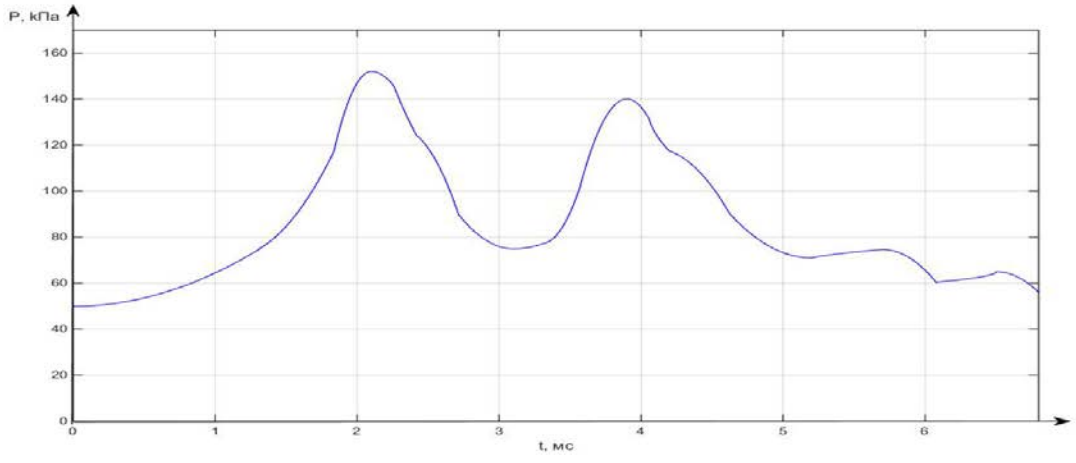
а)


P, кПа
60
50
40
30
20
10
0
0
2
4
6
8
10
12
t, мс

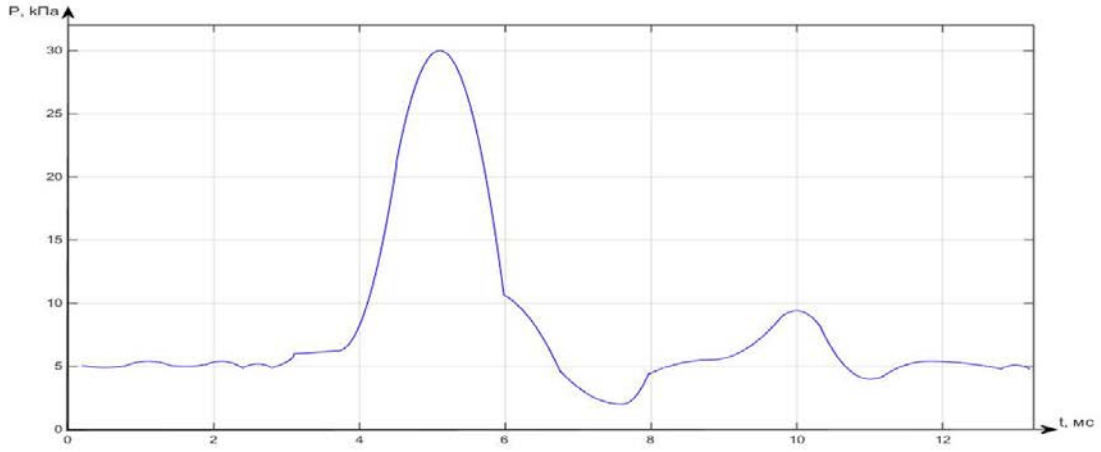
б)


P, кПа
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
t, мс

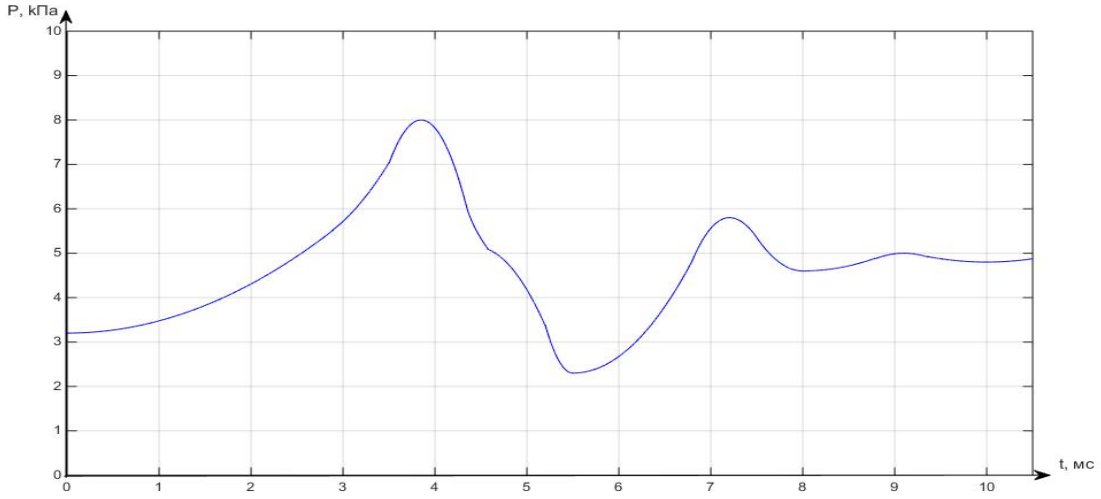
в)


P, кПа
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6
t, мс

г)



д)



є)

Рис. 4.5. — Збудження в рідині з бульбашками CO_2:

а) — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}034$; **б)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}5$; **в)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}015$; **г)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}02$;

д) — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}044$; **є)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}071$.

При подальшому зменшенні параметру σ відбувається якісна перебудова структури збудження. Якщо при $\sigma > \sigma_{кр}$ знакододатне збудження трансформується у знакододатні солітони, то при $\sigma < \sigma_{кр}$ воно трансформується у знакозмінний хвильовий пакет (рис. 4.5, є). Якщо початкове збудження являє собою ударну хвилю зі ступінчастим профілем, що відповідає умовно випадку $\sigma \to \infty$, то солітони поєднуються і в середовищі формується ударна хвиля з осцилюючою структурою (рис. 4.5, б). Осциляції тиску за переднім фронтом хвилі

зумовлено інерцією приєднаної маси газових включень і перевищують значення тиску початкового збудження.

Таким чином, обчислювальним експериментом доведено, що у випадку $\sigma/\mathrm{Re} << 1$ солітон та хвильовий пакет являють собою елементарні утворення у газорідинному середовищі. Будь-яке початкове збудження в залежності від параметру σ розпадається на послідовність солітонів хвильовий пакет.

З наведених результатів моделювання (рис. 4.5) видно також, що при $\sigma \approx \sigma_{кр}$ амплітуда збудження та його тривалість мало змінюються в процесі формування (солітону або хвильового пакету). Відбувається лише перебудова форми збудження: з трикутної вона перетворюється на усамітнену хвилю (рис. 4.5, а, б). У випадку ж хвильового пакету ($\sigma \approx \sigma_{кр}$) спостерігається значне зменшення амплітуди збудження при збільшенні його тривалості. Тобто, зміна амплітуди збуджень в зоні формування у випадку $\sigma/\mathrm{Re} << 1$ визначається співвідношенням між σ та $\sigma_{кр}$.

Висновки до розділу 4

1. Розроблено та запропоновано інструментальні програмно-алгоритмічні засоби (ІПАЗ) щодо розв’язання задач математичного моделювання динамічних станів у пароріднинних двофазних системах. Запропоновані ІПАЗ реалізовано на платформі спеціалізованого пакету Matlab, і при цьому використовують ToolBox Matlab в якості інструментальної бази.

2. Розглянуто досвід застосування розроблених у дисертаційній роботі математичних моделей (ММ) та методів їх обчислювального впровадження в практиці дослідження динамічних станів у пароріднинних двофазних системах. На прикладах типових інженерних застосувань (випарювання з утворенням парових бульбашок у каналі, в якому рухається пароріднинна суміш, а також виникнення та розвитку ударних хвиль у пароріднинних двофазних системах) проведено числові експерименти, що підтвердило конструктивність та практичну значущість розроблених ММ, обчислювальних методів та ІПАЗ їх реалізації при розв’язуванні широкого кола реальних задач дослідження динамічних станів у пароріднинних двофазних системах, які (задачі), в силу природних особливостей перебігу фізичних процесів, доконечно виникають галузях енергетики, хімічної (нафтохімічної), добувної (корисних копалин) та переробної галузей промисловості.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішено важливу наукову задачу, яка полягає у створенні моделей та методів числового моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем — ґрунтуючись на підході узагальнення, а також у розробці інструментальних програмно-алгоритмічних засобів моделювання, які забезпечують конструктивний розв'язок задач в практиці досліджень та інженерних розрахунків для широкої гами енергетичних процесів і об'єктів природного походження та технологічного призначення.

В тому числі отримано наступні теоретичні та практичні результати:

1. Виконано систематизацію та окреслено особливості прояву динаміки пароріднинних двофазних систем на основі аналізу поширених промислово важливих технологій та природних явищ, а також визначено проблематику основних задач моделювання та ідентифікації досліджуваного класу динамічних станів.

2. Виконано аналіз існуючих ММ динаміки пароріднинних двофазних систем. Показано, що у практичних реалізаціях систем моделювання пароріднинних сумішей існує брак адекватних ММ для поширених випадків динамічних станів останніх. Обґрунтовано адекватність математичного опису рівновагових динамічних станів пароріднинних систем у вигляді ДУЧП, а нерівновагових — у вигляді ВНЧП. Виявлено можливість розширення математичного опису досліджуваного класу динамічних станів у вигляді ДУЧП та ВНЧП (або їх систем) на випадки нестаціонарної та нелінійної постановок задач.

3. На основі виконаної систематизації динамічних станів пароріднинних двофазних систем розроблено сукупність ММ останніх для випадків рівновагового (у вигляді ДУЧП або їх систем) та нерівновагового (у вигляді ВНЧП або їх систем) випадків, а також виконано узагальнення математичного опису відповідних випадків вказаних динамічних станів, для яких проведено якісне дослідження з метою доведення існування та єдиності розв'язків отриманих ДРЧП або ВНЧП (систем ДРЧП або ВНЧП).

4. Застосування запропонованих ММ при моделюванні динамічних станів пароріднних двофазних систем дало змогу підвищити точність комп'ютерного моделювання на $(10...12)\%$ у порівнянні із відомими (емпіричними, рекурентними та статистичними) ММ. Причому, останні придатні до застосовування лише у вузькому діапазоні значень технологічних параметрів, з урахуванням яких утворено ці ММ. У іншому випадку адекватність емпіричних, рекурентних та статистичних ММ різко знижується (зменшується точність обчислень) і вони потребують корекції. На відміну від зазначеного, запропоновані ММ зберігають адекватність при зміні технологічних параметрів у широкому діапазоні, оскільки утворені на основі фундаментальних фізичних законів (зокрема, збереження маси, енергії, імпульсу, тощо), що характеризують динамічний стан пароріднної двофазної системи, який вони моделюють.

5. Запропоновано методи обчислювальної реалізації узагальнених ММ рівновагових та нерівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем, причому, в першому випадку, метод полягає у дискретизації неперервних ММ за явно-неявною схемою та наступному розв'язуванні результуючої системи дискретних алгебраїчних рівнянь за ітераційним процесом Зейделя, а у другому — метод полягає у розв'язуванні оптимізаційної задачі і зводиться до пошуку максимуму функції Гамільтона, записаної для розширеної узагальненої ММ досліджуваного динамічного стану. Дані методи дозволяють скоротити на $(3...7)\%$ обчислювальні витрати при числовій реалізації дискретних аналогів неперервних ММ за рахунок застосування економічних різницевих схем. Отримано умови збіжності розв'язків при числовій реалізації відповідних ММ за запропонованими методами.

6. Створено комплекс проблемно-орієнтованих ІПАЗ щодо моделювання динамічних станів пароріднних двофазних систем. ІПАЗ розроблено із застосуванням платформи спеціалізованого пакету Matlab та поєднано у єдиний пакет програмних модулів у відповідності до концепції Matlab Aplication Toolboxes, яку запроваджено у системі Matlab.

7. Запропоновані ММ, методи та алгоритми їх реалізації, а також розроблені ІПАЗ, дозволили конструктивно виконати розв’язок низки прикладних задач, а саме:

— моделювання рівновагового випарювання в задачі динаміки парової бульбашки;

— моделювання динамічного стану виникнення та розвитку ударних хвиль у пароріднинних двофазних системах.

Запропоновані ММ, методи та ІПАЗ їх числової реалізації, розроблено на основі підходу узагальнення, що дає змогу поширити досвід їх застосування у практику розв’язування широкого класу задач моделювання та прогнозування динамічних станів пароріднинних двофазних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Durst F., J. Fluid Mech. Combined measurements of particle velocities, size distributions and concentration, 1982. Vol. 104. № 2. P. 284–296.

2. Modarress D. Tan H., Elghobachi S. Two-Component LDA Measurement in a Two-Phase Turbulent Jet. *AIAA J*, 1984. Vol. 22. P. 624–630.

3. Shuen J.-S., Solomom A.S.P., Zhang Q.-P., Faeth G. M. Structure of particle laden jets: measurements and predictions. *AIAA J*, 1984. Vol. 3. P. 396–404.

4. Saidov A. S., Leiderman A. Yu., Karshiev A. B. The Thermovoltaic Effect in Variband Solid Soiution $Si_{1-x}G_{ex}$ ($0 \leq x \leq 1$). *Technical Physics Letters*, 2016. Vol. 42. № 7. P.725–728.

5. Bukač M. Čanić S, Muha B, Glowinski R. An operator splitting approach to the solution of fluid-structure interaction problems in hemodynamics / / in: Glowinski, R., Osher, S.J., Yin, W. (eds.). *Splitting Methods in Communication, Imaging, Science, and Engineering*. *Springer, Cham*, 2016. P. 731–772. https://doi.org/10.1007/978-3-319-41589-5_22

6. Causin P., Gerbeau J. F., Nobile F. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Comput Method Appl M*, 2015. № 194(42–44). P. 4506–4527. https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.12.005.

7. Symak D., Gumnitsky J., Atamaniuk V., Nagurskyy O. Investigation of physical dissolution of benzoic acid polydisperse mixture. *Chemistry and Chemical Technology*, 2017. Vol. 11, Issue 4. P. 469.

8. Галяс В. Л., Колотницький А. Г. Фізична і колоїдна хімія. Львів: Стрийська міська друкарня, 2004. 272 с.

9. Ткаченко С. Й., Степанова Н. Д. Методи розрахунку конденсатопроводів. *Вісник Хмельницького національного університету*, 2005. № 6, Том 2: Технічні науки. С. 82–85.

10. Данилюк О., Атаманюк В., Гумницький Я., Бачик М. Дослідження закономірностей процесу розчинення полідисперсних частинок

бензойної кислоти під час пневматичного перемішування. *Інтегровані технології та енергозбереження*, 2017. Вип. 4. С. 36–40.

11. Sahota Sh., Shah G., Ghosh P. Review of trends in biogas upgrading technologies and future perspectives. *Bioresour. Technol. Rep*, 2018. Vol. 1. P. 79–88.

12. Wang P., Zou W., Su H. Stability of complex-valued impulsive stochastic functional differential equations on networks with Markovian switching. *Appl. Math. Comput*, 2019. P. 338–354.

13. Положаєнко С. А., Лись Д. А. Математична формалізація динамічних станів пароріднинних двофазних систем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2021. Т. 11, № 1-2. С. 136–143. https://doi.org/10.15276/imms.v11.no1-2.134 URL: http://immm.opu.ua/#a23; http://immm.opu.ua/files/archive/n1-2_v11_2021/immm_n1_2_v11_2021.pdf (дата звернення: 12.01.2023).

14. Polozhaenko, S., Lys D. Modeling of wave processes in two-phase gas-liquid systems. *Colloquium-journal. Part 1*, 2021. № 32 (119). P. 37–41. https://doi.org/10.24412/2520-6990-2021-32119-37-41 URL: http://www.colloquium-journal.org/wp-content/uploads/2021/11/colloquium-journal-32119-chast-1.pdf; http://www.colloquium-journal.org/32119-2 (дата звернення: 18.03.2023).

15. Положаєнко, С. А., Лись Д. А. Моделювання хвильових процесів у газоріднинних системах. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 22. С. 88–96. https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.88-96. URL: http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive (дата звернення: 25.02.2023).

16. Lys Daria. Analysis of calculation methods, obtaining estimates and

ensuring the accuracy of simulation of control objects. *Scientific Collection «InterConf», (90): with the Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Conference «Current Issues and Prospects for the Development of Scientific Research»,* December 7-8, 2021. Orléans, France : Epi, 2021. P. 485–499. https://doi.org/10.51582/interconf.7-8.12.2021.055 URL: https://www.interconf.top/documents/2021.12.7-8.pdf https://www.interconf.top/archive.html (дата звернення: 29.03.2023).

17. Лись Д. А. Математична модель динамічного стану пароріднної суміші у пластових структурах. *Праці VIII Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю. П. Кунченка,* 25 – 26 травня 2021 р. Черкаси : ЧДТУ, 2021 С. 43–45. URL: https://chdtu.edu.ua/osnp/materials (дата звернення: 10.04.2023).

18. Lys Daria. Problems of basic objective of simulation and identification of dynamic states of vapor-liquid two-phase systems. *Sectoral research XXI: characteristics and features: collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the III International Scientific and Theoretical Conference*. Chicago, USA : European Scientific Platform. April 22, 2022. Vol. 2. P. 78–80 ISBN 979-8-88526-804-2 https://doi.org/10.36074/scientia-22.04.2022 URL: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/scientia/issue/view/22.04.2022?utm_source=eSputnikromo&utm_medium=email&utm_campaign=Konferenc%D1%96ja_%7C_Status_:_opubl%D1%96kovano&utm_content=1499726888; https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/scientia/issue/view/22.04.2022/733 (дата звернення: 01.05.2023).

19. Lys Daria. Mathematical models for formation and diffusion of waves in vapor-liquid two-phase systems. *The XVI International Scientific and Practical Conference «Innovative trends of science and practice, tasks and ways to solve them»*, April 26-29, Greece : Athens, 2022. P. 682–687 ISBN – 979-8-88526-740-3 https://doi.org/10.46299/ISG.2022.1.16 URL: https://isg-konf.com/innovative-

trends-of-science-and-practice-tasks-and-ways-to-solve-them/ (дата звернення: 11.11.2022).

20. Лись Д. А. Математична формалізація та обчислювальна реалізація динамічної моделі для середовища з дисипативним ефектом. *Науковий простір: актуальні питання, досягнення та інновації :* матеріали III Міжнародної наукової конференції. Міжнародний центр наукових досліджень. Хмельницький : Вінниця: Європейська наукова платформа, 13 травня, 2022 р. С. 310–313 УДК 001 (08), ISBN 978-617-8037-75-8, https://doi.org/10.36074/mcnd-13.05.2022 URL: https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/mcnd/issue/view/13.05.2022/743; https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/mcnd/issue/view/13.05.2022?utm_source=eSputnik-promo&utm_medium=email&utm_campaign=Konferenc%D1%96ja_%7C_Status_:_opubl%D1%96kovano&utm_content=1499726888 (дата звернення: 10.10.2022).

21. Лись Д. А. Розробка узагальненої математичної моделі рівновагових динамічних станів пароріднних двофазних систем: матеріали Дванадцятої Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених «Сучасні інформаційні технології – 2022» «Modern Information Technology – 2022» (19-20 травня 2022 р., м. Одеса) / МОН України; Державний університет «Одеська політехніка»; Ін-т комп'ют. систем. Одеса : Наука і техніка, 2022. С. 122-123 ISSN 2708-311X; УДК 004.91(063)М341 URL: http://ics_conf.tilda.ws/ukr https://drive.google.com/file/d/1tRDt3ddXv6LvEGlRtbc5SjQYJg2eg0tH/view?usp=sharing (дата звернення: 09.09.2022).

22. Fomin O., Polozhaenko S., Krykun V., Orlov A., Lys D. Interpretation of Dynamic Models Based on Neural Networks in the Form of Integral-Power Series. In: Arsenyeva, O., Romanova, T., Sukhonos, M., Tsegelnyk, Y. (eds) *Smart Technologies in Urban Engineering*. STUE 2022. Lecture Notes in Networks and

Systems, 2022. Vol 536. Springer, Cham. P. 258–265 https://doi.org/10.1007/978-3-031-20141-7_24 URL: http://stue.kname.edu.ua/proceedings/; https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-20141-7_24 (дата звернення: 15.01.2023).

23. Polozhaenko S., Fomin O., Orlov A., Krykun V., Lys D. Interpretation Method for Dynamic States Neural Network Models. *IEEE Third International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)* (October 4-6, 2022), 2022. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/SAIC57818.2022.9923008; ISBN:979-8-3503-9674-4; ISBN:979-8-3503-9675-1; URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/9923008/authors#authors; https://ieeexplore.ieee.org/xpl/conhome/9922952/proceeding?isnumber=9922911&pageNumber=2 (дата звернення: 17.02.2023).

24. Лись Д. А., Прокофьєв А.Ю. Моделювання динамічного стану ударних хвиль у пароріднинних двофазних системах. *«Сучасні Інформаційні Технології 2023»:* матеріали XIII міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених (18-19 травня 2023 р., м. Одеса) / МОН України; Національний університет «Одеська політехніка»; Ін-т комп'ют. систем. Одеса : Наука і техніка, 2023. С. 159–161 ISSN 2708-311X URL: https://drive.google.com/file/d/1ERFn923__zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view (дата звернення: 20.06.2023).

25. Лись Д. А., Прокофьєв. А. Ю. Розробка та числова реалізація математичної моделі гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2023. Т. 13, № 1-2. С. 97–103. https://doi.org/10.15276/imms.v13.no1-2.97. URL: http://immm.opu.ua/#a23; http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v13_2023/immm_n1-2_v13_2023.pdf

26. Мала гірнича енциклопедія: у з-х томах [Текст] / за ред.. В. С. Білецького. — Д.: Дондас, 2004. — Т. 1. — 640 с. ISBN 966-7804-14-3.

27. Циклаури Г. В., Данилин В. С., Селезнев Л. И. Адиабатные двухфазные течения. М. : Атомиздат, 1993. 351 с.

28. Марценюк, О. С., Немирович П. М., Віценко О. М., Пастушенко І. М. Методика Гідравлічного розрахунку газоріднинних циркуляційних труб. *Наукові праці* : НУХТ, 2012. № 44. С. 44–50.

29. Yang Z., Xu D., Xiang L. Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays. *Phys. Lett. A 359*, 2016. P. 129–137.

30. Прокопенко І. Г. Статистична обробка сигналів : навч. посіб. МОНУ, Київ : НАУ, 2011. 220 с.

31. Братченко Г. Д., Перелигін Б. В., Банзак О. В., Казакова Н. Ф., Григор'єв Д. В. Методи та засоби обробки сигналів : навч. посіб. Одеса: Типографія-видавництво «Плутон», 2014. 452 с.

32. Жук С. Я. Оптимізація проектування радіотехнічних систем. Київ : НТУУ «КПІ», 2012. 126 с.

33. Тимошенко Ю. О., Дідковська М. В. Узагальнена модель негомогенного пуассонівського процесу для оцінювання надійності технічних систем. *Проблеми програмування*, 2004. № 2–3. С. 480–489.

34. Дерев'янко Т., Кирилич В., Мільченко О. Задачі оптимального керування гіперболічними системами. *Globe Edit.* Chisinau, 2021. 142 с.

35. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі : підручник. Київ : Київський університет, 2004. 384 с.

36. Lewis P., Draguna L., Vrabie L., Vassilis L., Syrmos L. Optimal Control. *Willey&Sons*, Inc., 2012. 540 p.

37. Раєвнєва О. В., Стрижиченко К. А., Гольтяєва Л. А., Чанкіна І. В. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. для студентів ВНЗ / за ред.: О. В. Раєвнєва. Харків : Інжек, 2014. 365 с.

38. Оліскевич М. О. Основи економетрії часових рядів: навч. посіб. Л. : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008. 321 с.

39. Смислов В. В. Гідравліка і аеродинаміка. Київ : Вища школа, 1971. 348 с.

40. Константінов Ю. М., Гіжа. О. О. Технічна механіка рідини і газу. Київ : Вища школа, 2002. 277 с.

41. Chorin Alexandre Jerrold, Marsden E. A mathematical introduction to fluid mechanics. New York: Springer-Verlag, 2000. 169 p.

42. Алмазова О., Лисиченко М. Перерозподіл газу між об'ємною та бульбашковою фазою у воді, що опромінена електромагнітними хвилями низької інтенсивності. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*, 2023. Т.1. № 1-2 (7-8). С. 37–52. https://doi.org/10.20998/2411-0558.2022.02.03

43. Духневич Л. М., Приходько М. А., Ткаченко В. О., Яковлев В. В. Еволюція газової бульбашки з урахуванням дифузії і коагуляції. *Прикладна гідромеханіка*, 1999. Т. 1, № 1. С. 12–19.

44. Pavlenko A., Kutnyi B., Holik Y. Study of the effect of thermobaric conditions on the process of formation of propane hydrate. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2017. Vol 5(89). P. 43–50. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.111409

45. Tjahjono T., Wardana I. N. G., Sasongko M. N., Widodo A. S. Experimental and theoretical bubble growth comparison at the initial stages of horizontal injection. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2020. Vol 7 (105). P. 36–44. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.204102

46. Sahota Sh., Shah G., Ghosh P., Kapoor R. Review of trends in biogas upgrading technologies and future perspectives. *Bioresour. Technol. Rep.*, 2018. Vol.1. P. 79–88.

47. Yang Z., Xu D., Xiang L. Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays. *Phys. Lett.*, 2016. Vol. 359. P. 129–137.

48. Campbell I. J., Pitcher A. S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1998, Vol. 243, № 1235. P. 534–545.

49. Zwick S. A. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. *J. Math. and Phys*, 1998. Vol. 37, № 3. P. 36–52.

50. Демченко Р. М., Дикий П. В. Про рівняння типу Бусінеска повністю нелінійних і одного порядку дисперсії. *Мат. машини і системи*,

2009. № 2. С. 8–27. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/47029 (дата звернення: 06.06.2023).

51. Ogluzdin V. E. Bohr Correspondence Principle and Multiphoton Nature Raileigh Light Scattering. *J. Mod. Phys.* : journal, 2010. Vol. 1. P. 86–89. https://doi.org/10.4236/jmp.2010.11012.

52. Lin Hao, Brian Storey D., Szeri Andrew J. Initially driven in homogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh–Plesset equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002. Vol. 452. P. 154–167. https://doi.org/10.1017/S0022112001006693.

53. Mancas Stefan C., Rosu Haret C. Cavitations of spherical bubbles: closed-form, parametric, and numerical solutions. *J. Physics of Fluids*, 2015. Vol. 28. P. 79–96. https://doi.org/10.1063/1.4942237.

54. Flynn H. G. Physics of acoustic cavitation in liquids. In «Physical Acoustics» / v. 1B. W. Mason (Ed.). N.Y., 1964. P. 7–138.

55. Пташник М. Нелінійні псевдопараболічні рівняння та варіаційні нерівності. *Нелінійні граничні задачі*, 2002. Т.12. С. 140–153. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/169224 (дата звернення: 15.07.2022).

56. Яхно О. М., Мачуга О. С. Ексергійний аналіз та метод варіаційних нерівностей в деяких задачах гідромеханіки. *Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування*, 2016. № 3(78). С. 19–25. http://dx.doi.org/10.20535/2305-9001.2016.78.73382

57. Barbu V. Optimal control of varitional inequalities. London : Pitman, 1984. 365 p.

58. Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. Киев : Наукова думка, 1988. 286 с.

59. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі : підручник. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. 380 с.

60. Мацевитый Ю. М., Прокофьев В. Е. Моделирование нелинейных процессов в распределенных системах. Киев : Наукова думка, 1985. 303 с.

61. Kim Y, Peskin CS. Penalty immersed boundary method for an elastic boundary with mass. *Phys Fluids*, 2007. Vol 19(5). P. 45–62. https://doi.org/10.1063/1.2734674.

62. Hesch C. A., Gil A. J., Bonet J., Betsch P. Mortar approach for Fluid-Structure interaction problems: Immersed strategies for deformable and rigid bodies. *Comput Method Appl M.*, 2014. 278. P. 853–882. https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.06.004.

63. Семенова І. Ю. Математичні моделі механіки суцільних середовищ. Київ, КНУУ ім. Тараса Шевченка, 2014. 282 с.

64. Лущик У. Б., Новицький В. В., Браніцька Н. С., Алексєєва Т. С., Францевич К. А. Деякі сучасні математичні моделі гемодинаміки. *Питання механіка та її додатки. Т. 44* / Ін-т математики НАНУ. Київ, 2002. С. 18–23.

65. Бахрушин В. Є. Математичне моделювання. Запоріжжя: ГУ «ЗІДМУ», 2004. 318 с.

66. Квєтний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софина О. Ю., Шушура О. М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1 : навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2012. 257 с.

67. Ажогин В. В., Згуровский М. З. Автоматизированное проектирование математического обеспечения АСУ ТП. Киев, Вища школа, 1986. 334 с.

68. Овчаренко В. А., Подлєсний С. В., Зінченко С. М. Основи методу кінцевих елементів і його застосування в інженерних розрахунках. Краматорськ: Донбаська державна машинобудівна академія, 2008. 379 с.

69. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Київ : НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», 2018. 392 с.

70. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці: підручник. Київ : Вища школа, 2006. 480с.

71. Крижановська Т. В., Бойцова І. А. Чисельні методи. Одеса : Одеський державний екологічний університет, 2013. 152 с.

72. Процюк О. Б., Хапко Р. С. Чисельне розв'язування просторової задачі стаціонарної теплопровідності у півпросторі з шаром за допомогою функцій Гріна. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2011. Вип. 54 С. 188–198.

73. Argyros I. A. Unifying local–semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space. *J. Math. Anal. Appl*, 2004. Vol 298. P. 374–397.

74. Argyros I. A. Improving the rate of convergence of Newton methods on Banach spaces with a convergence structure and applications. *Appl. Math. Lett*, 1997. Vol. 6. P. 21–28.

75. Hernandez M. A., Rubio M. J. The Secant method for nondifferentiable operators. *Appl. Math. Lett*, 2002. Vol. 15. P. 395–399.

76. Hernandez M. A., Rubio M. J. A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations. *J. Math. Anal. Appl*, 2002. Vol. 275. P .821–834.

77. Шахно С. М., Дудикевич А. Т., Левицька С. М. Практична реалізація чисельних методів лінійної алгебри. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. 137 с.

78. Kelley C. Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. Philadelphia : SIAM Publications, 1995. 166 p.

79. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. New York Berlin Heidelberg : Springer, 2000. 655 p.

80. Марценюк О. С., Дубінін О. О., Тахістова Г. О. Коливання в гетерогенних системах. *Наукові праці НУХТ додаток до № 12*. Київ : НУХТ, 2002. С.7–16.

81. Efimova N. V., Krasnopyorova A. P. Two-phase aqueous systems of polypropylene glycol-425 and inorganic salts. *Kharkiv University Bulletin. Chemical Series*, 2012. Vol. (21), P. 185–191. https://doi.org/10.26565/2220-637X-2012-21-16

82. Price H. S., Coats K. H. Direct methods in reservoir simulation. *Soc. Eng. J*, 2004. Vol. 14. № 3. P. 295–308.

83. Згуровский М. З., Новиков А. Н. Анализ и управление односторонними физическими процессами. Киев : Наукова думка, 1996. 326 с.

84. Küttler U., Wall W. A. Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Comput Mech*, 2008. Vol. 43(1). P. 61–72. https://doi.org/10.1007/s00466-008-0255-5.

85. Wang, J., Anisimov M. A. Nature of vapor-liquid asymmetry in fluid criticality. *Phys. Rev*, 2007. Vol. E75. P 58–72.

86. Дзюбан І. Ю., Жиров О. Л., Охріменко О. Г. Методи дослідження операцій. Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2005. 108 с.

87. Дослідження операцій в економіці : підручник / за ред. І. К. Федоренко, О. І. Черняка *(Вища освіта XXI століття)* Київ : Знання, 2007. 558 с.

88. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник. 7-ме вид., переробл. та допов. Київ : Видавничий дім «Слово», 2006. 816 с.

89. Казарєзов А. Я., Верланов Ю. Ю. Дослідження операцій : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. освіти. *Ч. 1. Математичне програмування*. Миколаїв : Держ. гуманіт. ун-т ім. П. Могили, 2003. 83 с.

90. Ібрагімов Н. С. Необхідна умова типу принципу максимуму Понтрягіна в задачі ідентифікації для нестаціонарного рівняння тепло масообміну. *Кібернетика та системний аналіз*, 2012. Т. 48, № 3. С. 142–154.

91. Іщук В. В. Крайові задачі. Київ : КНУУ ім. Тараса Шевченка, 2014.136 с.

92. Верьовкіна Г. В., Ловейкін А. В. Конформні відображення функцій комплексної змінної. Київ : КНУУ ім. Тараса Шевченка, 2012. 152 с.

93. Комплексний аналіз. Приклади і задачі / Самойленко В. Г. та ін. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2010. 224 с.

94. Гаєв Є. О., Нестеренко Б. М. Універсальний математичний пакет MATLAB і типові задачі обчислювальної математики : навч. посіб.. Київ : Національний авіаційний університет, 2004. 193 с.

95. Лазарєв Ю. Ф. Початки програмування в середовищі MATLAB : навч. посіб. Київ : «Політехніка», 2000. 396 с.

96. Злобін Г. Г. Системи комп'ютерної математики в наукових обчисленнях : навч. посіб. Львів : Львівський національний університет ім. Івана Франка, 2013. 120 с.

97. Соколов О. Ю., Зарецька І. Т., Жолткевич Г. М., Ярова О. В. Інформатика для інженерів / за ред. О. Ю. Соколова, І. Т. Зарецької. Харків : Факт, 2005. 424 с.

98. Maple – The Essential Tool for Mathematics. *Maplesoft* : веб-сайт. URL: http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx (дата звернення: 25.12.2022).

99. Campbell S. L. Modelling and Simulation in Scilab / Scicor. Springer, 2005. 313 p.

100. Scilab Home Page. *Scilab* : веб-сайт. URL: http://www.scilab.org/ (дата звернення: 13.04.2023).

101. Stephen L., Chancelier J.-P., Nikoukhah R. Modelling and Simulation in Scilab / Scicos with ScicosLab 4.4. Springer, 2010. 330 p.

102. Xcos hints. *Xcos for very beginners* : веб-сайт. URL: https://www.scilab.org/sites/default/files/prg/att/1738/Xcos_beginners.pdf (дата звернення: 27.01.2023).

103. Лубков М. В., Захарчук О. О. Моделювання процесів фільтрації у неоднорідних анізотропних нафтоносних пластах. *Geoinformatska*. 2019, № 4 (72), С. 74–81.

104. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia : 2006. 521 p.

105. Ertekin, T., Abou-Kassem J. H., King G. R. Basic applied reservoir simulation. Texas : Richardson, 2001. 421 p.

106. Верлань А. Ф., Положаенко С. А., Сербов Н. Г. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов. Киев : Наукова думка, 2011. 416 с.

107. Положаенко С. А. Математические модели процессов течения аномальных жидкостей. *Моделювання та інформаційні технології* : зб. наук. пр. Киев : ІПМЕ, 2001. Вып. 9. С. 14–21.

108. Повстяной О. Ю., Кузьмов А. В. Моделювання пористої структури в багатошарових фільтруючих порошкових матеріалах. *International Scientific and Practical Conference «World Science»*, 2016, №10 (14). Vol. 1. P. 5–9.

109. Рудь В. Д., Заболотний О. Ю., Богінський Л. С. Технології, структура, властивості пористих проникних матеріалів : монографія. Луцьк : РВВ ЛНТУ, 2016. 200 с.

110. Василенко С. М., Кулінченко В. Р., Шевченко О. Ю., Піддубний В. А. Гідрогазодинаміка. Київ : Кондор-Видавництво, 2016. 676 с. ISBN 978-617-7278-58-9

111. Завойко Б. М., Лещій Н. П. Технічна механіка рідин і газів : основні теоретичні положення та задачі : навч. посіб. для студ. інж.-техн. спец. / за ред. В. М. Жука. Львів : Новий Світ 2000, 2004. 120 с.: іл. + додатки. — ISBN 966-7827-44-5 URL: PDF-файл (дата звернення: 28.05.2023).

112. Колчунов В. І. Теоретична та прикладна гідромеханіка : навч. посіб. Київ : НАУ, 2004. 336 с. ISBN 966-598-174-9

113. Константінов Ю. М., Гіжа О. О. Технічна механіка рідини і газу : підручник. Київ : Вища школа, 2002. 277 с. : іл. ISBN 966-642-093-7

114. Левицький Б. Ф., Лещій Н. П. Гідравліка. Загальний курс. Львів : Світ, 1994. 264 с. ISBN 5-7773-0158-4

115. Прикладна гідроаеромеханіка і механотроніка : підручник для студентів ВНЗ / за ред. О. М. Яхно та ін.; Київ : Нац. техн. ун-т України «Київ. політехн. ін-т ім. І. Сікорського», Вінниц. нац. техн. ун-т. Вінниця : ВНТУ, 2017. 710 с. : іл., табл. ISBN 978-966-641-687-5

116. Глосарій термінів з хімії / уклад. Й. Опейда, О. Швайка. – Ін-т фізико-органічної хімії та вуглехімії ім. Л. М. Литвиненка НАН України, Донецький національний ун-т. Донецьк : Вебер, 2008. 738 с. ISBN 978-966-335-206-0.

117. Азеотропія / відп. ред. А. М. Киридон та ін.; Київ : Держ. наукова установа «Енциклопедичне видавництво», 2016. Т. 1. 592 с. ISBN 978-617-7238-39-2.

118. Chen W. H., Sienfeld I. H. Estimation of the location of the boundary of a petroleum reservoir. *Sos Pet. Eng. J*, 1975. V15, Vol. № 1. P. 19–38.

119. Попов В. В. Методи обчислень. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2012. 303 с.

120. Мовчан А. П. Методи статичної оптимізації : навч. посіб. / за ред. А. П. Мовчан, О. В. Степанець. Київ : НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2012. 138 с.

121. Теслюк В. М. Градієнтні методи розв'язання задач безумовної оптимізації. Львів : Націон. ун-т «Львівська політехніка», 2012. 67 с.

122. Андрійчук М. І. Методи синтезу та оптимізації: Ч. 1. Львів: Націон. ун-т «Львівська політехніка», 2005. 64 с.

123. Загарюк Р. В. Методи багатокритеріальної оптимізації : Ч.1. Львів : нац. ун-т «Львівська політехніка», 2012. 52 с.

124. Krasnov G. Air bubble movement in pulsating liquid. *Journal of Mining Science*, 2006. Vol. 42, №. 5. P. 500–505.

125. Yukhnovskii I. R. Phase Transitions in a Vicinity of the Vapor-Liquid Critical Point. *Ukrainian Journal of Physics*, 2019, Vol. 10(1), №33. URL: https://ujp.bitp.kiev.ua/index.php/ujp/article/view/2019662 (дата звернення: 05.02.2023).

126. Нагорний В. П., Денисюк І. І., Юшицина Я. О. Підвищення нафтогазовіддачі пластів способом акустичної дії. *Геоінформатика*, 2012. №4 С. 19–21.

127. Currie I. G. Fundamental mechanics of fluids. *Mechanical Engineering A Series of Textbooks and Reference Books*. New York; Basel : Marcel Dekker, Inc., 2003. 525 p.

128. Miller Donald Stuart. Internal flow system. *(Information Services) The Fluid Engineering Centre (BHRA Fluid Engineering Series)* / 2-nd edition. Granfield ; Bredford : BHRA, 1990. 396 p.

129. Журавська Г. В., Рева Н. В. Рівняння математичної фізики: Метод функцій Гріна. Київ : НТУУ«КПІ ім. І. Сікорського», 2014. 184 с.

130. Катрич В. О., Майборода Д. В., Погарський С. О., Просвірнін С. Л. Чисельні методи в прикладній фізиці : навч. посіб. Харків : Харківський нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна, 2008. 156 с.

131. Катрич В. О., Майборода Д. В., Погарський С. О., Просвірнін С. Л. Чисельні методи в прикладній фізиці : навч. посіб. Харків: Харківський нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна, 2011. 172 с.

132. Зражевський Г. М. Чисельні методи в задачах механіки : метод. посіб. Ч. 1: Теоретична та прикладна механіка. Київ : Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2015. 99 с.

133. Гончаров О. А., Васильєва Л. В., Юнда А. М. Чисельні методи розв’язування прикладних задач : навч. посібник. Суми : Сумський держ. ун-т, 2020. 142 с. ISBN 978-966-657-828-3

134. Довгий Б. П., Вакал Є. С. Інформаційні системи та технології : навч. посіб. для студентів механіко-математичного факультету. Київ : Видавець Кравченко Я. О., 2021. 111 с.

135. Довгий Б. П. Методи обчислень. Київ : Київський ун-т ім. Т. Шевченка, 2021. 81 с.

136. Григоренко Ю. В. Математичні моделі процесів первинної обробки сирих вуглеводнів та їх обчислювальна реалізація. *Праці IV*

Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю. П. Кунченка. Черкаси : ЧДТУ, 2013. С. 7–9.

137. Положаєнко С. А., Григоренко Ю. В. Математичне моделювання процесів первинної переробки сирих вуглеводнів. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2014. Вип. 10. С. 178–181.

138. Григоренко Ю. В. Чисельний метод реалізації математичних моделей процесів первинної переробки сирих вуглеводнів. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2014. Т.4. № 1. С. 85–92.

139. Григоренко Ю. В. Математичні моделі та узагальнення математичного опису процесів первинної переробки сирих вуглеводнів. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2014. Т.4. № 2. С. 180–188.

140. Курпа Л. В., Лінник Г. Б. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. Харків : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. 312 с.

141. Ажогин В. В., Згуровский М. З. Машинное проектирование оптимальных систем управления пространственно-распределенными динамическими объектами. Киев : Вища школа, 1985. 168 с.

142. Pistilli T. Behind the Models: Cholesky Decomposition, 2019 : веб-сайт. URL: https://towardsdatascience.com/behind-the-models-choleskydecomposition-b61ef17a65fb (дата звернення: 23.03.2023).

143. Solving Partial Differential Equations with Finite Elements : веб-сайт. URL: https://reference.wolfram.com/language/FEMDocumentation/tutorial/SolvingPDEwithFEM.html (дата звернення: 15.05.2023).

144. Partial Differential Equations : The Finite Element Method. In: Hauser J.R. (eds) Numerical Methods for Nonlinear Engineering Models. Springer,

Dordrecht : веб-сайт. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9920-5_13 (дата звернення: 08.11.2022).

145. Sangare Boureima. Finite differences method and adaptive grids in the method of lines for partial differential equation : веб-сайт. URL: https://www.arpapress.com/Volumes/Vol23Issue2/IJRRAS_23_2_02.pdf (дата звернення: 03.10.2022).

146. Положаенко С. А. Математические модели процессов течения аномальных жидкостей. *Моделювання та інформаційні технології* : зб. наук. пр. Киев : ІПМЕ, 2001. Вип. 9. С. 14–21.

147. Положаенко С. А. Метод оптимизационного решения одного класса вариационных неравенств. *Тр. Одес. политехн. ун-та*. Одесса, 2001. Вып. 1(13). С. 175–181.

148. Положаенко С. А. Оптимизационный подход к исследованию моделей объектов, представленных в виде вариационных неравенств. *Автоматика, автоматизация, электротехнические комплексы и системы*, 2002. № 1. С. 6–12.

149. Положаенко С. А. Подход к решению одного класса вариационных неравенств. *Вісн. Черкас. держ. технол. ун-ту*. Черкаси, 2002. Вип. 1. С. 30–35.

150. Гладка О. М., Кузьменко А. П. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатошаровій смузі. *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач* : зб. наук. праць. Київ : Ін-т математики НАН України, 1995. Вип. 9. С. 168–173.

151. Мамчич Я. М. Обчислювальні методи лінійної алгебри. Луцьк : ПП. Іванюк В. П., 2015. 56 с.

152. Ляшенко М. Я., Голован М. С. Чисельні методи. Київ : Либідь, 1996. 288 с.

153. Дичка І. А., Онай М. В., Гадиняк Р. А. Чисельні методи. Розв’язання задач лінійної алгебри та нелінійних рівнянь: лабораторний практикум. Київ : НТТУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 95 с.

154. Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. Численные методы в инженерных расчетах. Киев : Вища школа, 1986. 263 с.

155. Колесницький О. К., Арсенюк І. Р., Месюра В. І. Чисельні методи : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2017. 130 с.

156. Гетьманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування : навч. посіб. Київ : Либідь, 2001. 256 с.

157. Tschisgale S., Fröhlich J. An immersed boundary method for the fluid-structure interaction of slender flexible structures in viscous fluid. *J Comput Phys*, 2020. P. 423–435. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109801

158. Rajagopal K. R., Saccomandi G., Angew Z. Circularly polarized wave propagation in a class of bodies defined by a new class of implicit constitutive relations. *Math. Phys*, 2014. Vol.65(5), P. 1003–1010. https://doi.org/10.1007/s00033-013-0362-9

159. Erbay H. A., Şengül Y. Travelling waves in one-dimensional non-linear models of strain-limiting viscoelasticity. *Int. J. Non-Linear Mech*., 2015. Vol. 77. P. 61–68. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.07.005

160. Liu Chao, Zeng Danliny. Bubble growth in a superheated liquid during decompression. *Engineering Thermophysics*, 1998. Vol.19. №1. P. 1–4.

161. Nigmatulin R. I., Khabeeu N. S., Nagier F. B. Dynamics heat and mass transfer of gas-vapor bubbles in liquid. *Int. Heat and Mass Transfer*, 1981. Vol.24. №6. P. 1033–1044.

162. Драганов Б. Х., Алмаєв Р. А. Аналіз динаміки та теплообміну парових бульбашок у газорідинному середовищі. *Енергетика і автоматика*, 2014. № 3. С. 32–39.

163. Theofanous T. G., Biasil L., Isbin H., Fauske H. A theoretical study on bubble growth in constant and time-dependent pressure fields. *Chem. Eng. Sci*, 2006. Vol. 24. № 5. P. 385–397.

164. Tajiri M., Murakami Y. On breather solutions to the Boussinesq equation. *J. Phys. Soc. Jpn*, 1989. Vol. 58. № 10. P. 3585–3590.

165. Clarkson P., Dowie E. Rational solutions of the Boussinesq equation and applications to rogue waves. *Chem. Eng. Sci*, 2017. Vol. 84, № 7. P. 483–497.

166. Bogdanov L. V., Dowie E. The Boussinesq equation revisited. *Physica D*, 2002, Vol. 165. P. 137–162.

167. Pozrikidis C. Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation. Boston [etc.] : Kluwer Academic Publishers, 2001. 685 p.

Додаток А. Документи, що підтверджують впровадження результатів дисертаційного дослідження

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Перший проректор
Національного університету
«Одеська політехніка»
професор Сергій НЕСТЕРЕНКО

«23» травня 2023 р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи
ЛИСЬ Дар'ї Анатоліївни
«МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ»
у навчальному процесі Національного університету «Одеська політехніка»

Чинну довідку видано в тому, що в курсах лекцій з дисциплін «Автоматизація проектування систем управління» та «Автоматизація виробничих процесів», що читаються студентам за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» на кафедрі комп'ютеризованих систем та програмних технологій Інституту комп'ютерних систем Національного університету «Одеська політехніка», використовуються наукові результати, одержані в дисертаційній роботі ЛИСЬ Дар'ї Анатоліївни.

Принципи побудови та реалізації математичних моделей (ММ) динамічних станів пароріднних двофазних систем викладаються за темами: «Моделі технологічних процесів та систем управління» — дисципліни «Автоматизація виробничих процесів», «Машинні методи та інструментальні програмні засоби реалізації математичних моделей систем управління» дисципліни «Автоматизація проектування систем управління».

При вивченні методів машинного синтезу законів управління, та

інструментальних засобів машинної ідентифікації, що розглядаються в дисципліні «Автоматизація проектування систем управління», використовується відповідні підходи математичної формалізації об'єктів управління (тобто складання їх ММ), що враховують наявність фізично притаманних явищам пароутворення та конденсації у промислово важливих та природних процесах ефектів нелійності та нерівновагового матеріального балансу. Крім того, в теоретичному матеріалі, що викладається у зазначеній дисципліні, використано методи реалізації відповідних ММ, засновані на градієнтних процедурах оптимізації та математичному апараті варіаційних нерівностей.

При розгляді питань практичної реалізації систем комп'ютерного моделювання та машинної ідентифікації типових виробничих процесів використовуються запропоновані в дисертаційній роботі ЛИСЬ Дар'ї Анатоліївни комп'ютерні засоби розв'язання задач моделювання динамічних станів пароріднинних двофазних систем.

Навчальний процес підтримано ЛИСЬ Дар'єю Анатоліївною у співпраці з лекторами відповідних курсів, що знайшло відбиття у підготовці розділів конспектів лекцій та методичних вказівок до практичних і лабораторних робіт із зазначених дисциплін.

Директор Інституту комп'ютерних систем, д.т.н., професор Світлана АНТОЩУК

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ
“НАФТОГАЗ ІНЖИНІРИНГ ПРОЕКТ”

юр. адреса: 01024, м. Київ, вул. Круглоуніверситетська, 7, оф. 26/1; код ЄДРПОУ: 42469795
тел.: +38 095 045 85 01; e-mail: info@oged.com.ua

«Затверджую»
Директор
_____ Л.І. Бабій
«10» грудня 2022 р.

АКТ

впровадження результатів дисертаційного дослідження
ЛИСЬ Дар’ї Анатоліївни на тему:
«МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ»

ТОВ «НАФТОГАЗ ІНЖИНІРИНГ ПРОЕКТ» прийняло до впровадження нові математичні моделі (ММ) динамічних станів пароріднних двофазних систем, а також комплекс програмних засобів реалізації зазначених ММ. Вказані наукові та практичні добутки дисертаційної роботи віднайшли застосування в існуючій в умовах підприємства системі автоматизованого управління технологічними процесами (АУТП).

Застосування розробленого у дисертаційній роботі комплексу програмних засобів дозволило зняти проблему оперативної корекції та підналаштування ММ в умовах безперервності виробництва.

Запропоновані ЛИСЬ Д. А математичні моделі розроблено з урахуванням фізико-хімічних явищ, які притаманні певним процесам утворення пароріднних двофазних сумішей у виробничих апаратах і, на відміну від широко поширених рекурентних ММ, вони забезпечують високу точність моделювання у всьому діапазоні зміни технологічних параметрів. Остання обставина важлива при переналаштуванні системи АУТП з урахуванням різних технологічних параметрів виробничих процесів.

Впроваджені комп’ютерні засоби реалізації ММ динамічних станів пароріднних двофазних систем демонструють свою ефективність у зменшенні витрат на етапі обчислювальних процедур, що реалізуються в системі АУТП, та у підвищенні якості готової продукції (зменшенні відхилень від нормативних показників).

Запропоновані ММ дозволяють проводити обрахунок технологічних режимів з більш високими регламентними показниками, що визначає їх переваги у практичному застосуванні.

Головний інженер **М.М. Колосков**

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ
ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ
«НАФТОГАЗХІМ СЕРВІС»
(ТОВ «НГХ СЕРВІС»)
Ідентифікаційний код 38781431
Україна, 04050, м. Київ,
вул. Січових Стрільців, буд. 68-Б, літера А
Тел.: +380 (44) 232-09-59
Е-пошта: *info@ogcs.com.ua*
Вебсайт: *www.ogcs.com.ua*

«Затверджую»:
Директор
ТОВ «НАФТОГАЗХІМ СЕРВІС»
_____ **Ю.В. Григоренко**
«___» _____ 2022 р.

АКТ

впровадження результатів дисертаційного дослідження
ЛИСЬ Дар'ї Анатоліївни на тему:

«МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СТАНІВ ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМ»

Розроблені ЛИСЬ Дарією Анатоліївною математичні моделі (ММ) динамічних станів пароріднинних двофазних систем можна розглядати як такі, що мають вагоме значення при розв'язуванні задач пароутворення та конденсації в технологічних апаратах, зокрема, теплоенергетичної, хімічної та переробної галузей промисловості.

Запропоновані ММ адекватно описують досліджувані процеси пароутворення та паро рідинної рівноваги, що випливає з можливості врахування якісних явищ, притаманним цим процесам: в'язкопластичності, наявності граничного градієнту тиску, аномальності значення функції стану тощо. Вказані переваги запропонованих ММ дають змогу ефективно використовувати їх у теоретичних і прикладних експериментальних дослідженнях низки природних та промислово важливих процесів, таких як: добуток корисних копалин (багатофракційних вуглеводнів), режимів хвиле- та бульбашкоутворення для рівно- та нерівновагових станів плину пароріднинних двофазних потоків у технологічних апаратах енергетичного

обладнання (парогенератори, теплообмінники, змішувачі тощо), хімічної і переробної галузей промисловості.

Впровадження запропонованих у дисертаційній роботі ЛИСЬ Д. А. моделей у теорію та практику дослідження динамічних станів пароріднних двофазних систем і сумішей дало змогу отримати нові результати щодо їх динамічної поведінки, наприклад, утворення та розвитку бульбашкових режимів, режимів хвилеутворення (в тому числі «ударних хвиль») фрактальних структур.

Головний інженер **В.М. Даниленко**

Додаток Б. Визначення умови збіжності ітераційного процесу зейделя для системи рівнянь (2.29) (або (2.30))

Метод Зейделя на відміну, зокрема, від методу простої ітерації [154], при обчисленні i-ї компоненти вектора $\mathbf{\Phi}^{\nu}$ на $(\nu+1)$-й ітерації (нижче, для конкретності, розглядається вираз (2.29)) використовуються значення $\Phi_1^{\nu+1}$, $\Phi_2^{\nu+1}$, …, $\Phi_i^{\nu+1}$, обчислені на цій самій ітерації.

Для системи рівнянь (3.48) ітераційний процес за процедурою Зейделя в матричній формі представимо наступним чином:

$$\mathbf{\Phi}^{\nu+1} = \mathbf{S}\mathbf{\Phi}^{\nu+1} + \mathbf{V}\mathbf{\Phi}^{\nu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{Г.1}$$

де матриці $\mathbf{T}$, $\mathbf{W}$ та $\mathbf{e}$ відповідно визначаються як

$$\mathbf{S} = \Delta t\left[\left(\mathbf{A}_i + \frac{\mathbf{B}_i}{2\Delta z}\right)\right]^{m+1}, \quad \mathbf{V} = \Delta t\left[\left(\mathbf{A}_i + \frac{\mathbf{B}_i}{2\Delta z} + \mathbf{C}_i\right)\right]^{m},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\left[\mathbf{D}_i U^m + \mathbf{E}_i F^m\right]}{\Delta t\left\{\left[\left(\mathbf{A}_i + \frac{\mathbf{B}_i}{2\Delta z}\right)\right]^{m+1} + \left[\left(\mathbf{A}_i + \frac{\mathbf{B}_i}{2\Delta z} + \mathbf{C}_i\right)\right]^{m}\right\}}.$$

Для збіжності ітераційного процесу Зейделя *необхідно* і *достатньо* [83], щоб всі власні числа матриці $\left[\mathbf{V} + (\mathbf{S} - \boldsymbol{\varepsilon})\lambda\right]$ були за модулем меншими за одиницю.

У зв'язку з цим сформулюємо та доведемо наступну теорему.

Теорема Г.1. Нехай при всіх i виконується умова

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|S_{i,j} + V_{i,j}\right| \le q\left|S_{i,i} + V_{i,i}\right|, \quad i = \overline{1,n}, \quad q < 1. \tag{Г.2}$$

Тоді

$$\left\|\Phi^{\nu+1} - \Phi^{*}\right\|_1 \le q\left\|\Phi^{\nu} - \Phi^{*}\right\|_1, \tag{Г.3}$$

Тобто ітераційний процес (Г.1) збігається до шуканого розв'язку Φ^{*}.

Доведення теореми Г.1. Використовуючи до системи (Г.1) нерівність трикутника [152, 154], запишемо наступне

$$\|\mathbf{\Phi}\| \le \|\mathbf{S} + \mathbf{V}\| \cdot \|\mathbf{\Phi}\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|,$$

звідки

$$\|\mathbf{\Phi}\|\left(1 - \|\mathbf{S} + \mathbf{V}\|\right) \le \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \quad \text{або} \quad \|\mathbf{\Phi}\| \le \left(1 - \|\mathbf{S} + \mathbf{V}\|\right)^{-1} \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}\|. \tag{Г.4}$$

Тоді з (Г.4), вочевидь, випливає, що умовою збіжності (Г.1) буде наступна

$$\|\mathbf{S} + \mathbf{V}\| \le 1. \tag{Г.5}$$

Теорему Г.1 доведено.

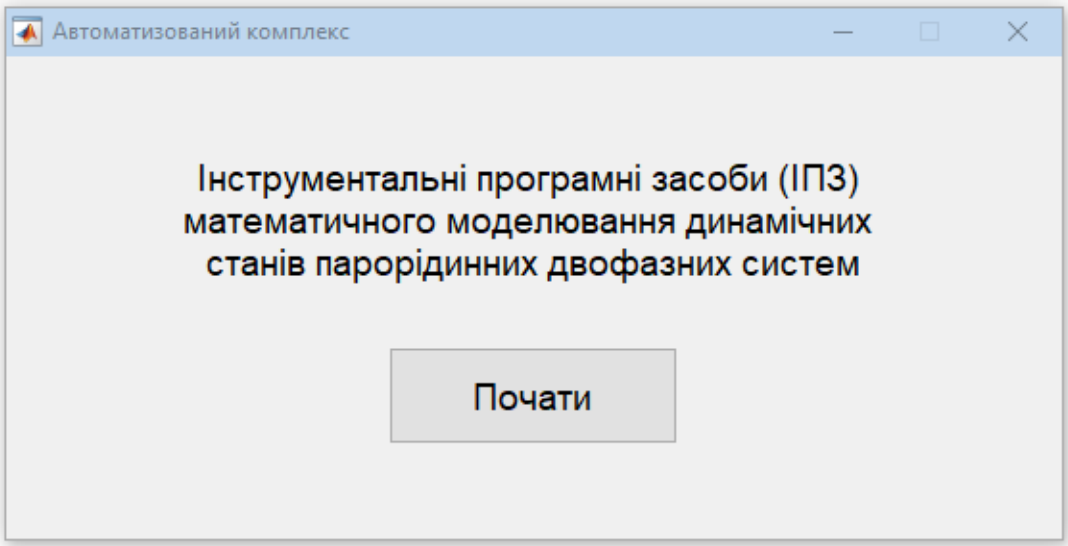
Таким чином, можна стверджувати, що для збіжності ітераційного процесу (3.31) необхідно і достатньо щоб виконувалася умова (Г.5).

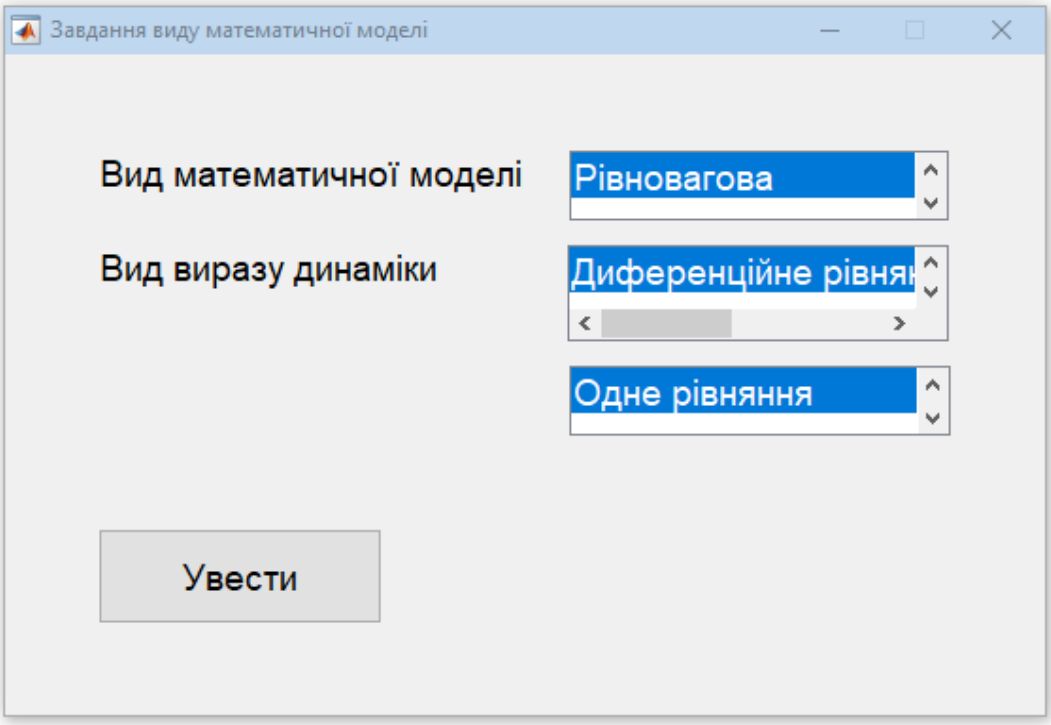
Аналогічним чином визначається умова збіжності ітераційного процесу Зейделя для системи рівнянь виду (3.30).

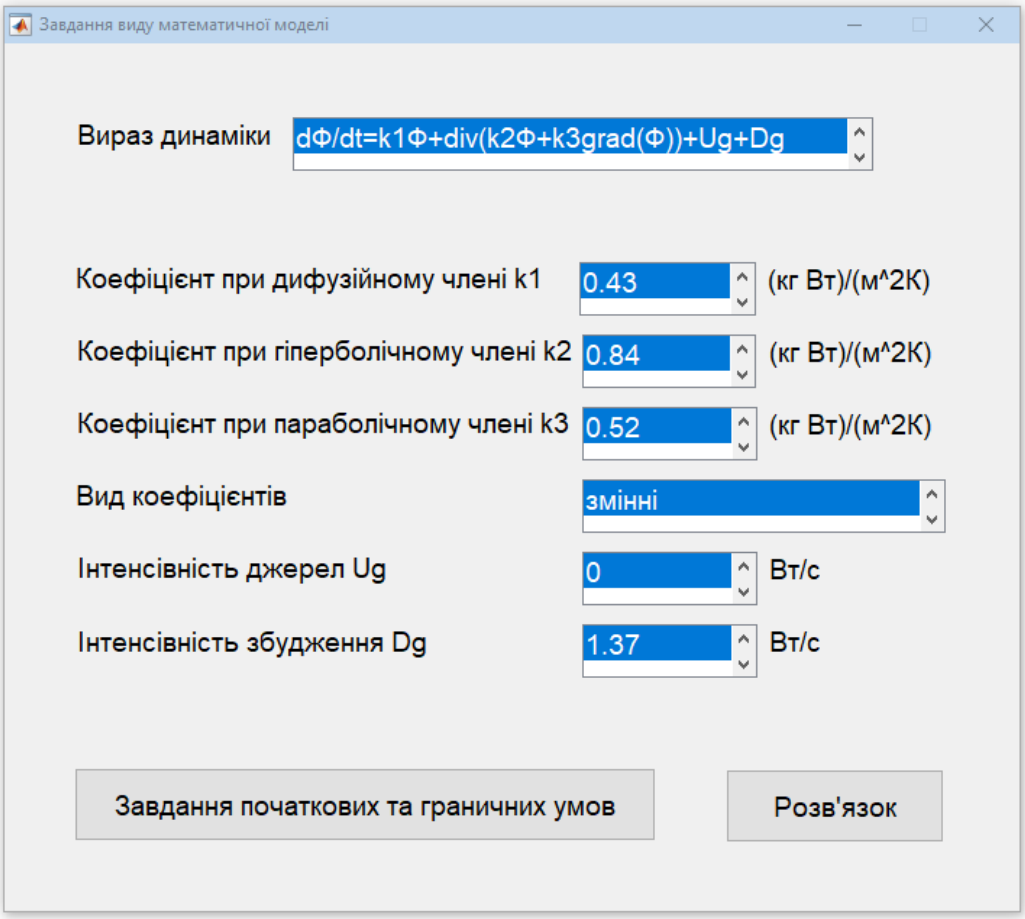
Додаток В. Реалізація інструментальних програмно-алгоритмічних засобів математичного моделювання динамічних станів пароріднних двофазних систем

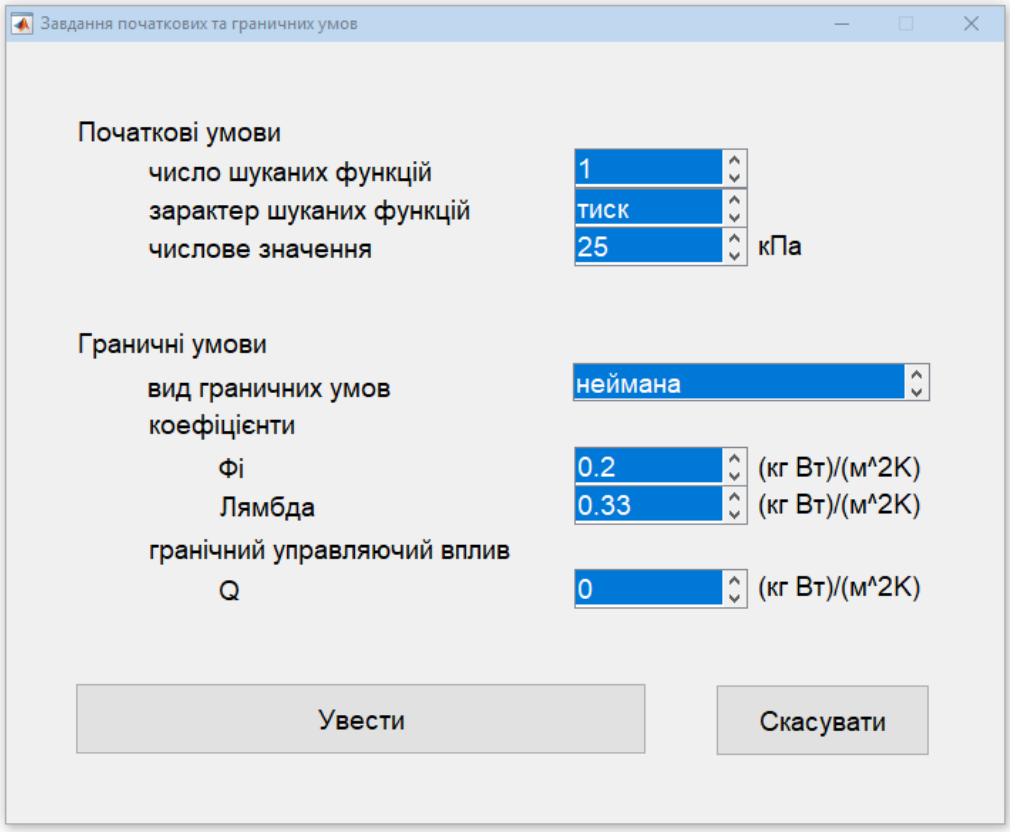
Вид діалогових вікон,

які відповідають режимам роботи комплексу ІПЗ






Завдання виду математичної моделі
Вираз динаміки
dΦ/dt=k1Φ+div(k2Φ+k3grad(Φ))+Ug+Dg
Коефіцієнт при дифузійному члені k1
0.43
(кг Вт)/(м^2К)
Коефіцієнт при гіперболічному члені k2
0.84
(кг Вт)/(м^2К)
Коефіцієнт при параболічному члені k3
0.52
(кг Вт)/(м^2К)
Вид коефіцієнтів
змінні
Інтенсівність джерел Ug
0
Вт/с
Інтенсівність збудження Dg
1.37
Вт/с
Завдання початкових та граничних умов
Розв'язок


Завдання початкових та граничних умов
Початкові умови
число шуканих функцій
1
характер шуканих функцій
тиск
числове значення
25
кПа
Граничні умови
вид граничних умов
неймана
коефіцієнти
Фі
0.2
(кг Вт)/(м^2K)
Лямбда
0.33
(кг Вт)/(м^2K)
гранічний управляючий вплив
Q
0
(кг Вт)/(м^2K)
Увести
Скасувати